複素数 z の実部と虚部がともに正であり，z は

$$z^2+\frac{1}{z^2}=1$$

を満たしている．次の問いに答えよ．

(1) z を極形式で表せ．ただし．偏角 θ は $0 \leqq \theta < 2\pi$ とする．

(2) $z^{100}+\dfrac{1}{z^{100}}$ を求めよ

(3) 複素数平面上の 3 点 z，z^2，$z^{100}+\dfrac{1}{z^{100}}$ を頂点とする三角形の面積を求めよ．

(22 福岡教大 3)

【答】

(1) $z=\cos\dfrac{\pi}{6}+i\sin\dfrac{\pi}{6}$

(2) -1

(3) $\dfrac{\sqrt{3}}{4}$

【解答】

$$z^2+\frac{1}{z^2}=1 \qquad \cdots\cdots (*)$$

(1) z は実部と虚部がともに正の複素数であるから

$$z=r(\cos\theta+i\sin\theta) \quad \left(r>0,\ 0<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$$

とおくことができる．

$$\begin{aligned} z^2+\frac{1}{z^2} &= r^2(\cos 2\theta+i\sin 2\theta)+\frac{1}{r^2}\{\cos(-2\theta)+i\sin(-2\theta)\} \\ &= r^2(\cos 2\theta+i\sin 2\theta)+\frac{1}{r^2}(\cos 2\theta-i\sin 2\theta) \\ &= \left(r^2+\frac{1}{r^2}\right)\cos 2\theta+\left(r^2-\frac{1}{r^2}\right)i\sin 2\theta \end{aligned}$$

z は $(*)$ を満たすから

$$\begin{cases} \left(r^2+\dfrac{1}{r^2}\right)\cos 2\theta=1 & \cdots\cdots ① \\ \left(r^2-\dfrac{1}{r^2}\right)\sin 2\theta=0 & \cdots\cdots ② \end{cases}$$

$r>0$，$0<2\theta<\pi$ より，② から

$$r=1$$

であり，このとき ① は

$$2\cos 2\theta=1 \qquad \therefore\quad 2\theta=\frac{\pi}{3} \qquad \therefore\quad \theta=\frac{\pi}{6}$$

である．

よって

$$\boldsymbol{z=\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}} \qquad \cdots\cdots(答)$$

である．

(2) (1) の結果とド・モアブルの定理より

$$\begin{aligned} z^{100}+\frac{1}{z^{100}} &= \left(\cos\frac{100}{6}\pi+i\sin\frac{100}{6}\pi\right)+\left(\cos\frac{-100}{6}\pi+i\sin\frac{-100}{6}\pi\right) \\ &= \left(\cos\frac{50}{3}\pi+i\sin\frac{50}{6}\pi\right)+\left(\cos\frac{50}{3}\pi-i\sin\frac{50}{3}\pi\right) \\ &= 2\cos\frac{2}{3}\pi \quad \left(\because\ \frac{50}{3}\pi=16\pi+\frac{2}{3}\pi\right) \\ &= \mathbf{-1} \qquad\qquad \cdots\cdots(\text{答}) \end{aligned}$$

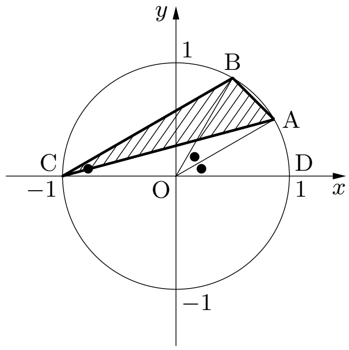
である.

(3) (1) の結果とド・モアブルの定理より

$$z^2=\cos\frac{2\pi}{6}+i\sin\frac{2\pi}{6}=\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}$$

$\mathrm{A}(z)$, $\mathrm{B}(z^2)$, $\mathrm{C}\left(z^{100}+\dfrac{1}{z^{100}}\right)$, $\mathrm{D}(1)$ とおくと

$$\angle\mathrm{DCB}=\frac{1}{2}\angle\mathrm{DOB}=\angle\mathrm{DOA}$$



BC // AO であるから，求める面積は

$$\begin{aligned} \triangle\mathrm{ABC} &= \triangle\mathrm{OBC} \\ &= \frac{1}{2}\cdot 1^2\cdot\sin\frac{2}{3}\pi \\ &= \boldsymbol{\frac{\sqrt{3}}{4}} \qquad\qquad \cdots\cdots(\text{答}) \end{aligned}$$

である.