複素数

$$\alpha = \frac{\sqrt{3}i}{1+\sqrt{3}i}$$

に対して，複素数 z_n を

$$z_n = 8\alpha^{n-1} \quad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

によって定める．ただし，i は虚数単位とする．複素数平面において，原点を O とし，z_n が表す点を P_n とする．このとき，次の問 (1)〜(5) に答えよ．解答欄 (省略) には答えだけでなく途中経過も書くこと．

(1) α の絶対値 $|\alpha|$ と偏角 $\arg\alpha$ をそれぞれ求めよ．ただし，$0 \leqq \arg\alpha < 2\pi$ とする．
(2) z_2，z_3 の実部と虚部をそれぞれ求めよ．
(3) z_n の極形式を n を用いて表せ．
(4) O，P_n，P_{n+1} を頂点とする三角形の面積 S_n を n を用いて表せ．
(5) (4) で定めた S_n に対して，無限級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} S_n$ の和 S を求めよ．

(22 立教大 理 4)

【答】

(1) $|\alpha| = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$，$\quad \arg\alpha = \dfrac{\pi}{6}$
(2) z_2 の実部は 6，虚部は $2\sqrt{3}$，z_3 の実部は 3，虚部は $3\sqrt{3}$
(3) $z_n = 8\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^{n-1}\left\{\cos\dfrac{(n-1)\pi}{6} + i\sin\dfrac{(n-1)}{6}\right\}$
(4) $S_n = 8\sqrt{3}\left(\dfrac{3}{4}\right)^{n-1}$
(5) $S = 32\sqrt{3}$

【解答】

$$\alpha = \frac{\sqrt{3}i}{1+\sqrt{3}i}, \quad z_n = 8\alpha^{n-1} \quad (n \geqq 1)$$

(1) α を極形式で表すと

$$\begin{aligned}\alpha &= \frac{\sqrt{3}\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right)}{2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)} \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2}\left\{\cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3}\right)\right\} \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2}\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)\end{aligned}$$

である．$0 \leqq \arg\alpha < 2\pi$ より

$$\boldsymbol{|\alpha| = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \arg\alpha = \frac{\pi}{6}} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．

(2) (1) より

$$z_2 = 8\alpha = 8 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right) = 4\sqrt{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) = 6 + 2\sqrt{3}i$$

$$z_3 = 8\alpha^2 = 8 \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 \left\{\cos\left(2 \cdot \frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(2 \cdot \frac{\pi}{6}\right)\right\} = 6\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = 3 + 3\sqrt{3}i$$

であるから，

$\boldsymbol{z_2}$**の実部は 6，虚部は** $\boldsymbol{2\sqrt{3}}$ ……(答)

であり

$\boldsymbol{z_3}$**の実部は 3，虚部は** $\boldsymbol{3\sqrt{3}}$ ……(答)

である.

(3) (1) より，z_n の極形式は

$$\begin{aligned} z_n &= 8\alpha^{n-1} \\ &= \boldsymbol{8\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{n-1}\left\{\cos\frac{(n-1)\pi}{6} + i\sin\frac{(n-1)}{6}\right\}} \end{aligned}$$ ……(答)

である.

(4) $\triangle \mathrm{OP}_n\mathrm{P}_{n+1}$ について調べる.

$$z_{n+1} = 8\alpha^n = \alpha z_n = \frac{\sqrt{3}}{2}\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)z_n$$

P_{n+1} は P_n を原点のまわりに $\frac{\pi}{6}$ 回転し，原点を中心に $\frac{\sqrt{3}}{2}$ 倍した点であるから

$$\angle \mathrm{P}_n\mathrm{OP}_{n+1} = \frac{\pi}{6}, \quad \mathrm{OP}_n = |z_n| = 8\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{n-1}, \quad \mathrm{OP}_{n+1} = 8\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n$$

である．よって

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{1}{2} \cdot \mathrm{OP}_n \cdot \mathrm{OP}_{n+1}\sin\frac{\pi}{6} \\ &= \frac{1}{2} \cdot 8\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{n-1} \cdot 8\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n \cdot \frac{1}{2} \\ &= \boldsymbol{8\sqrt{3}\left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}} \end{aligned}$$ ……(答)

である.

(5) (4) より，$\sum_{n=1}^{\infty} S_n$ は初項 $8\sqrt{3}$，公比 $\frac{3}{4}$ の無限等比級数である．|(公比)| < 1 なので収束し，和 S は

$$S = \frac{8\sqrt{3}}{1 - \frac{3}{4}} = \boldsymbol{32\sqrt{3}}$$ ……(答)

である.