次の方程式

$$z^4 = -8 - 8\sqrt{3}i$$

を解け．ただし，i は虚数単位である．

(22 長崎大 医・工・歯・教育・薬・情報 3(4))

【答】 $z = \pm(1+\sqrt{3}i)$，$\pm(\sqrt{3}-i)$

【解答】

$$z^4 = -8 - 8\sqrt{3}i \qquad \cdots\cdots ①$$

$$(\text{右辺}) = 16\left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = 16\left(\cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3}\right)$$

$z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$，ただし $r > 0$，$0 \leqq \theta < 2\pi$ とおくと

$$z^4 = r^4(\cos 4\theta + i\sin 4\theta)$$

であり

$$① \iff \begin{cases} r^4 = 16 \\ 4\theta = \dfrac{4\pi}{3} + 2n\pi \quad (n\ \text{は整数}) \end{cases}$$

$$\therefore \quad \begin{cases} r = 2\ (>0) \\ \theta = \dfrac{\pi}{3} + \dfrac{n\pi}{2} \end{cases}$$

$0 \leqq \theta < 2\pi$ より，$\theta = \dfrac{\pi}{3}$，$\dfrac{5\pi}{6}$，$\dfrac{4\pi}{3}$，$\dfrac{11\pi}{6}$ である．

$$z = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right) = 1 + \sqrt{3}i$$

$$z = 2\left(\cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6}\right) = -\sqrt{3} + i$$

$$z = 2\left(\cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3}\right) = -1 - \sqrt{3}i$$

$$z = 2\left(\cos\frac{11\pi}{6} + i\sin\frac{11\pi}{6}\right) = \sqrt{3} - i$$

以上より，求める解は

$$\boldsymbol{z = \pm(1+\sqrt{3}i),\ \pm(\sqrt{3}-i)} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．