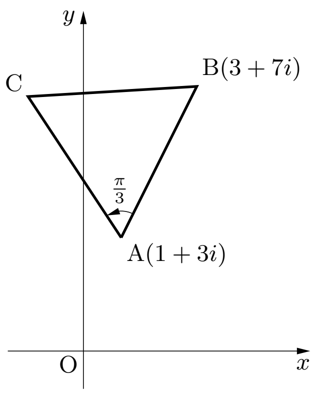
複素数平面上において，複素数 $1+3i$ を表す点を A，$3+7i$ を表す点を B とし，実部が負である複素数 $a+bi$ を表す点を C とする．3 点 A，B，C を頂点とする三角形が正三角形であるとき，複素数 $a+bi$ を求めよ．

(22 高知工科大 後 システム・環境理工・情報 1(7))

【答】 $a+bi=2-2\sqrt{3}+(5+\sqrt{3})i$

【解答】

$\alpha=1+3i$, $\beta=3+7i$, $\gamma=a+bi$ $(a<0)$ とおくと，A(α)，B(β)，C(γ) が正三角形の頂点となる条件は，C が A を中心に B を $\dfrac{\pi}{3}$ 回転した点となることである．



$$\gamma-\alpha=(\beta-\alpha)\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)$$

$$\begin{aligned}\therefore\quad \gamma&=\alpha+(\beta-\alpha)\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)\\&=(1+3i)+(2+4i)\frac{1+\sqrt{3}i}{2}\\&=(1+3i)+(1+2i)(1+\sqrt{3}i)\\&=(1+3i)+\{(1-2\sqrt{3})+(2+\sqrt{3})i\}\\&=2-2\sqrt{3}+(5+\sqrt{3})i\end{aligned}$$

よって

$$a+bi=\boldsymbol{2-2\sqrt{3}+(5+\sqrt{3})i}$$ ……(答)

である．