自然数 $a,\ k\ (k \geqq 2)$ に対し，a からはじまる k 個の連続する自然数の和を $S(a,\ k)$ とする．次の問いに答えなさい．

(1) $S(a,\ k)$ を a と k の式で表しなさい．
(2) $S(a,\ 15) = 540$ のときの a の値を求めなさい．
(3) $S(3,\ k) = 1888$ のときの k の値を求めなさい．
(4) (2) で定めた a と (3) で定めた k の積の値を求めなさい．
(5) $S(a,\ k) = 3422$ となる a と k の組み合わせを 3 組すべて求めなさい．

(22 福島大 後 理工 4・食農 3)

【答】

(1) $S(a,\ k) = \dfrac{1}{2}k(2a+k-1)$
(2) $a = 29$
(3) $k = 59$
(4) 1711
(5) $(a,\ k) = (854,\ 4),\ (104, 29),\ (29, 59)$

【解答】

(1) $S(a,\ k)$ は初項 a，(公差 1，) 末項 $a+k-1$，項数 k の等差数列の和なので

$$\begin{aligned} S(a,\ k) &= \frac{1}{2}k\{a+(a+k-1)\} \\ &= \boldsymbol{\frac{1}{2}k(2a+k-1)} \end{aligned}$$ ……(答)

である．

(2) (1) の結果を用いると

$$\begin{aligned} &S(a,\ 15) = 540 \\ &\frac{1}{2}\cdot 15(2a+15-1) = 540 \\ &a+7 = 36 \\ \therefore\ &\boldsymbol{a = 29} \end{aligned}$$ ……(答)

である．

(3) (1) の結果を用いると

$$\begin{aligned} &S(3,\ \ k) = 1888 \\ &\frac{1}{2}k(2\cdot 3+k-1) = 1888 \\ &k(k+5) = 3776 \\ &k^2+5k-3776 = 0 \\ &(k+64)(k-59) = 0 \quad (\because\ 3776 = 2^6\cdot 59) \\ \therefore\ &\boldsymbol{k = 59} \quad (\because\ k \geqq 2) \end{aligned}$$ ……(答)

である．

(4) $a = 29$，$k = 59$ より

$$ak = 29\cdot 59 = \mathbf{1711}$$ ……(答)

である．

(5) $S(a,\ \ k) = 3422$ となるのは

$$\frac{1}{2}k(2a+k-1) = 2\cdot 29\cdot 59$$
$$k(2a+k-1) = 2^2\cdot 29\cdot 59$$

k は 2 以上の自然数であるが

$$(2a+k-1)+k = 2(a+k)-1 = (\text{奇数})$$

なので，$2a+k-1$ と k の偶奇は異なり，$k=2$ とはなり得ない．
　よって

$$(k,\ 2a+k-1) = (4,\ 1711),\ (29,\ 236),\ (59,\ 116)$$
$$\therefore\ \ \boldsymbol{(a,\ k) = (854,\ 4),\ (104, 29),\ (29, 59)} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．