1 より大きい二つの正整数 a, b は互いに素とする．

(1) $0 < k < b$ を満たす任意の正整数 k に対して，等式

$$\left[\frac{ka}{b}\right] + \left[\frac{(b-k)a}{b}\right] = a - 1$$

が成り立つことを証明せよ．但し，実数 r に対して $[r]$ は r を越えない最大の整数を表す．

(2) 等式

$$\sum_{k=1}^{b-1}\left[\frac{ka}{b}\right] = \frac{(a-1)(b-1)}{2}$$

が成り立つことを証明せよ．

(22 奈良県医大 後 医 3)

【答】

(1) 略

(2) 略

【解答】

a, b は 1 より大きい互いに素な整数である．

(1) $0 < k < b$ を満たす任意の正整数 k に対して，$0 < \dfrac{k}{b} < 1$ であり，a, b は互いに素であるから，$\dfrac{ka}{b}$ は整数でない．したがって

$$\left[\frac{ka}{b}\right] = m \quad (m \text{ は } 0 \text{ 以上の整数})$$

とおくと

$$m < \frac{ka}{b} < m + 1$$

が成り立つ．これより，$\dfrac{(b-k)a}{b} = a - \dfrac{ka}{b}$ は

$$a - (m+1) < a - \frac{ka}{b} < a - m$$

であり

$$\left[a - \frac{ka}{b}\right] = a - (m+1)$$

である．よって

$$\left[\frac{ka}{b}\right] + \left[\frac{(b-k)a}{b}\right] = m + \{a - (m+1)\} = a - 1$$

が成り立つ．　　　　……(証明終わり)

(2) (1) の等式の辺々を，$k = 1,\ 2,\ \cdots,\ b-1$ として加えると

$$\sum_{k=1}^{b-1}\left(\left[\frac{ka}{b}\right] + \left[\frac{(b-k)a}{b}\right]\right) = \sum_{k=1}^{b-1}(a-1)$$

$$\sum_{k=1}^{b-1}\left[\frac{ka}{b}\right] + \sum_{k=1}^{b-1}\left[\frac{(b-k)a}{b}\right] = (a-1)(b-1) \qquad \cdots\cdots ①$$

が成り立つ．ここで，左辺の第 2 項は

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{b-1}\left[\frac{(b-k)a}{b}\right] &= \left[\frac{b-1}{b}a\right]+\left[\frac{b-2}{b}a\right]+\cdots+\left[\frac{2}{b}a\right]+\left[\frac{1}{b}a\right]\\ &= \sum_{k=1}^{b-1}\left[\frac{ka}{b}\right] \quad (\because \text{ 並べる順を逆にした})\end{aligned}$$

となるから，① は

$$2\sum_{k=1}^{b-1}\left[\frac{ka}{b}\right]=(a-1)(b-1)$$

となり

$$\sum_{k=1}^{b-1}\left[\frac{ka}{b}\right]=\frac{(a-1)(b-1)}{2} \qquad \cdots\cdots \text{(証明終わり)}$$

が成り立つ．