正の整数の i 乗の和 $\sum_{k=1}^{n} k^i$ を $S_i(n)$ で表すとき，次の問に答えよ．

(1) $S_0(22)$，$S_1(22)$，$S_2(22)$ および $S_3(22)$ の値を求めよ．

(2) 和 $\sum_{k=1}^{n}\{(2k+4)^4-(2k+2)^4\}$ を n について因数分解せよ．

(3) $(k+1)^5-k^5=5k^4+10k^3+10k^2+5k+1$ であることを用いて，以下の式の ア，イ，ウ，エ，オ に当てはまる数を求めよ．

$$5S_4(n)+1=\boxed{\text{ア}}(n+1)^5+\boxed{\text{イ}}S_3(n)+\boxed{\text{ウ}}S_2(n)+\boxed{\text{エ}}S_1(n)+\boxed{\text{オ}}S_0(n)$$

(4) $(k+1)^6-k^6=6k^5+15k^4+20k^3+15k^2+6k+1$ であることを用いて，$S_5(n)$ を n の多項式で表したときの最高次数の項を求めよ．

(5) $S_5(n)$ はある定数 カ，キ，ク，ケ，コ に対して，以下の式を満たすことが知られている．このとき，定数 カ，キ，ク，ケ，コ を求めよ．

$$S_5(n)=\boxed{\text{カ}}\{S_1(n)\}^5+\boxed{\text{キ}}\{S_1(n)\}^4+\boxed{\text{ク}}\{S_1(n)\}^3+\boxed{\text{ケ}}\{S_1(n)\}^2+\boxed{\text{コ}}S_1(n)$$

(22 山形大 理・農 4)

【答】

(1) $S_0(22)=22$，$S_1(22)=253$，$S_3(22)=3795$，$S_3(22)=64009$

(2) $16n(n+4)(n^2+4n+8)$

(3)

ア	イ	ウ	エ	オ
1	-10	-10	-5	-1

(4) $\frac{1}{6}n^6$

(5)

カ	キ	ク	ケ	コ
0	0	$\frac{4}{3}$	$-\frac{1}{3}$	0

【解答】

$$S_i(n)=\sum_{k=1}^{n} k^i$$

(1) $S_i(n)$ の定義から

$$S_0(22)=\sum_{k=1}^{22} k^0=1\cdot 22=\mathbf{22} \quad \cdots\cdots(\text{答})$$

$$S_1(22)=\sum_{k=1}^{22} k^1=\frac{22\cdot 23}{2}=\mathbf{253} \quad \cdots\cdots(\text{答})$$

$$S_2(22)=\sum_{k=1}^{22} k^2=\frac{22\cdot 23\cdot 45}{6}=\mathbf{3795} \quad \cdots\cdots(\text{答})$$

$$S_3(22)=\sum_{k=1}^{22} k^3=\frac{(22\cdot 23)^2}{4}=\mathbf{64009} \quad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．

(2) すべてを書き出し，一つ一つ加えていくと

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=1}^{n}\{(2k+4)^4-(2k+2)^4\}\\
&=(2n+4)^4-4^4\\
&=\{(2n+4)^2-4^2\}\{(2n+4)^2+4^2\}\\
&=\{(2n+4)-4\}\{(2n+4)+4\}\{(2n+4)^2+4^2\}\\
&=2n(2n+8)(4n^2+16n+32)\\
&=\boldsymbol{16n(n+4)(n^2+4n+8)} \qquad \cdots\cdots(\text{答})
\end{aligned}$$

である．

(3) $(k+1)^5-k^5=5k^4+10k^3+10k^2+5k+1$ より

$$\sum_{k=1}^{n}\{(k+1)^5-k^5\}=\sum_{k=1}^{n}(5k^4+10k^3+10k^2+5k+1)$$

$$(n+1)^5-1=5S_4(n)+10S_3(n)+10S_2(n)+5S_1(n)+S_0(n)$$

よって

$$5S_4(n)+1=\mathbf{1}(n+1)^5\ \mathbf{-10}\ S_3(n)\ \mathbf{-10}\ S_2(n)\ \mathbf{-5}\ S_1(n)\ \mathbf{-1}\ S_0(n) \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．

(4) $(k+1)^6-k^6=6k^5+15k^4+20k^3+15k^2+6k+1$ より

$$\sum_{k=1}^{n}\{(k+1)^6-k^6\}=\sum_{k=1}^{n}(6k^5+15k^4+20k^3+15k^2+6k+1)$$

$$(n+1)^6-1=6S_5(n)+15S_4(n)+20S_3(n)+15S_2(n)+6S_1(n)+S_0(n)$$

$$\therefore\quad 6S_5(n)+1=(n+1)^6-15S_4(n)-20S_3(n)-15S_2(n)-6S_1(n)-S_0(n)$$

右辺の第 2 項以降は n について 5 次以下の多項式であるから，右辺の最高次数の項は n^6 である．よって，$S_5(n)$ を n の多項式で表したときの最高次数の項は

$$\boldsymbol{\frac{1}{6}n^6} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．

(5) $S_1(n)=\dfrac{n(n+1)}{2}$ より

$$\{S_1(n)\}^2=(n\text{ の 4 次式}),\quad \{S_1(n)\}^3=(n\text{ の 6 次式}),$$
$$\{S_1(n)\}^4=(n\text{ の 8 次式}),\quad \{S_1(n)\}^5=(n\text{ の 10 次式})$$

である．(4) より $S_5(n)$ は n の 6 次式であるから，与えられた式は

$$S_5(n)=0\{S_1(n)\}^5+0\{S_1(n)\}^4+a\{S_1(n)\}^3+b\{S_1(n)\}^2+cS_1(n)$$

となる．(4) より $S_5(n)$ の最高次数の項は $\dfrac{1}{6}n^6$ であるから，右辺の最高次数の項と係数を比較すると

$$\frac{1}{6}=a\left(\frac{1}{2}\right)^3 \qquad \therefore\quad a=\frac{4}{3}$$

したがって

$$S_5(n)=\frac{4}{3}\{S_1(n)\}^3+b\{S_1(n)\}^2+cS_1(n)$$

となる．これは n について恒等式であるから

$$\begin{cases} S_5(1) = \dfrac{4}{3}\{S_1(1)\}^3 + b\{S_1(1)\}^2 + cS_1(1) \\ S_5(2) = \dfrac{4}{3}\{S_1(2)\}^3 + b\{S_1(2)\}^2 + cS_1(2) \end{cases}$$

$$\therefore \quad \begin{cases} 1^5 = \dfrac{4}{3}\cdot 1^3 + b\cdot 1^2 + c\cdot 1^1 \\ 1^5 + 2^5 = \dfrac{4}{3}(1+2)^3 + b(1+2)^2 + c(1+2)^1 \end{cases}$$

$$\therefore \quad \begin{cases} b + c = -\dfrac{1}{3} \\ 9b + 3c = -3 \end{cases}$$

$$\therefore \quad b = -\frac{1}{3}, \quad c = 0$$

よって

$$S_5(n) = \mathbf{0}\{S_1(n)\}^5 + \mathbf{0}\{S_1(n)\}^4 + \boldsymbol{\frac{4}{3}}\{S_1(n)\}^3 \boldsymbol{-\frac{1}{3}}\{S_1(n)\}^2 + \mathbf{0}\{S_1(n)\} \quad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．

- 教科書で扱われているのは

$$S_0(n) = \sum_{k=1}^{n} k^0 = n$$

$$S_1(n) = \sum_{k=1}^{n} k^1 = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$S_2(n) = \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$S_3(n) = \sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

までである．(3) より

$$\begin{aligned} S_4(n) &= \frac{1}{5}\{(n+1)^5 - 10S_3(n) - 10S_2(n) - 5S_1(n) - S_0(n) - 1\} \\ &= \cdots \\ &= \frac{n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)}{30} \end{aligned}$$

また，(4) より

$$\begin{aligned} S_5(n) &= \frac{1}{6}\{(n+1)^6 - 15S_4(n) - 20S_3(n) - 15S_2(n) - 6S_1(n) - S_0(n) - 1\} \\ &= \cdots \\ &= \frac{n^2(n+1)^2(2n^2+2n-1)}{12} \end{aligned}$$

を得る．

- $$S_5(n) = \frac{1}{12}n^2(n+1)^2(2n^2+2n-1)$$

を変形すると

$$\begin{aligned} S_5(n) &= \frac{1}{12}n^2(n+1)^2\{2n(n+1)-1)\} \\ &= \frac{1}{6}n^3(n+1)^3 - \frac{1}{12}n^2(n+1)^2 \\ &= \frac{4}{3}\left\{\frac{n(n+1)}{2}\right\}^3 - \frac{1}{3}\left\{\frac{n(n+1)}{2}\right\}^2 \\ &= \frac{4}{3}\{S_1(n)\}^3 - \frac{1}{3}\{S_1(n)\}^2 \end{aligned}$$

を得る．