自然数 n に対して，整式 $f_n(x)$ を次の条件によって定める．

$$f_1(x)=1,\quad f_2(x)=x,\quad f_n(x)=xf_{n-1}(x)-f_{n-2}(x)\quad (n=3,\ 4,\ 5,\ \cdots)$$

以下の問いに答えよ．

(1) $f_5(x)$ を，2 つの 2 次式の積の形に因数分解せよ．また，方程式 $f_5(x)=0$ を解け．

(2) $0<\theta<\pi$ のとき，$f_n(2\cos\theta)=\dfrac{\sin n\theta}{\sin\theta}$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ であることを証明せよ．

(3) $n\geqq 2$ のとき，方程式 $f_n(x)=0$ のすべての解を，n と三角関数を用いて表せ．

(22 公立はこだて未来大 シス情 4)

【答】

(1) $f_5(x)=(x^2+x-1)(x^2-x-1)$，$x=\dfrac{-1\pm\sqrt{5}}{2},\ \dfrac{1\pm\sqrt{5}}{2}$

(2) 略

(3) $x=2\cos\dfrac{k\pi}{n}\quad (k=1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ n-1)$

【解答】

$$f_1(x)=1,\ f_2(x)=x \qquad \cdots\cdots ①$$

$$f_n(x)=xf_{n-1}(x)-f_{n-2}(x)\quad (n\geqq 3) \qquad \cdots\cdots ②$$

(1) ①, ② を用い，$f_3(x)$，$f_4(x)$，$f_5(x)$ を順次求めていくと

$$f_3(x)=xf_2(x)-f_1(x)=x\cdot x-1=x^2-1$$

$$f_4(x)=xf_3(x)-f_2(x)=x(x^2-1)-x=x^3-2x$$

$$\begin{aligned}f_5(x)&=xf_4(x)-f_3(x)=x(x^3-2x)-(x^2-1)=x^4-3x^2+1\\&=(x^2-1)^2-x^2\\&=\boldsymbol{(x^2+x-1)(x^2-x-1)}\end{aligned} \qquad \cdots\cdots(答)$$

$f_5(x)=0$ を解くと

$$x^2+x-1=0 \text{ または } x^2-x-1=0$$

$$\therefore\quad \boldsymbol{x=\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2},\ \frac{1\pm\sqrt{5}}{2}} \qquad \cdots\cdots(答)$$

である．

(2) すべての自然数 n に対して

$$f_n(2\cos\theta)=\frac{\sin n\theta}{\sin\theta} \qquad \cdots\cdots (*)$$

であることを数学的帰納法で示す．

(i) $n=1,\ 2$ のとき

まず，$n=1$ のとき

$$(\text{左辺})=f_1(2\cos\theta)=1,$$

$$(\text{右辺})=\frac{\sin(1\cdot\theta)}{\sin\theta}=1$$

$n=1$ のとき，$(*)$ は成立する．

次に，$n=2$ のとき

$$(\text{左辺})=f_2(2\cos\theta)=2\cos\theta,$$
$$(\text{右辺})=\frac{\sin 2\theta}{\sin\theta}=\frac{2\sin\theta\cos\theta}{\sin\theta}=2\cos\theta$$

$n=2$ のときも $(*)$ は成立する．

(ii) $n=k,\ k+1$ のとき $(*)$ が成り立つと仮定する．

$$\begin{aligned}
&f_{k+2}(2\cos\theta)\\
&=2\cos\theta\cdot f_{k+1}(2\cos\theta)-f_k(2\cos\theta)\\
&=2\cos\theta\cdot\frac{\sin(k+1)\theta}{\sin\theta}-\frac{\sin k\theta}{\sin\theta}\quad(\because\ \text{帰納法の仮定})\\
&=\frac{\sin\{(k+1)\theta+\theta\}+\sin\{(k+1)\theta-\theta\}}{\sin\theta}-\frac{\sin k\theta}{\sin\theta}\quad(\because\ \text{積和の公式})\\
&=\frac{\sin(k+2)\theta}{\sin\theta}
\end{aligned}$$

よって，$n=k+2$ のときも $(*)$ は成立する．

以上 (i)，(ii) より，すべての自然数 n に対して $(*)$ は成り立つ．　……(証明終わり)

(3) $f_n(x)=0$ において $x=2\cos\theta$ とおくと，(2) より

$$f_n(2\cos\theta)=0\qquad\therefore\quad\frac{\sin n\theta}{\sin\theta}=0\qquad\therefore\quad\sin n\theta=0$$

$0<\theta<\pi$ のとき，$0<n\theta<n\pi$ であるから

$$n\theta=\pi,\ 2\pi,\ 3\pi,\ \cdots,\ (n-1)\pi$$
$$\theta=\frac{\pi}{n},\ \frac{2\pi}{n},\ \frac{3\pi}{n},\ \cdots,\ \frac{(n-1)\pi}{n}\qquad\cdots\cdots ③$$

よって

$$x=2\cos\frac{\pi}{n},\ 2\cos\frac{2\pi}{n},\ 2\cos\frac{3\pi}{n},\ \cdots,\ 2\cos\frac{(n-1)\pi}{n}$$

は $f_n(x)=0$ の解である．

$0<\theta<\pi$ において $\cos\theta$ は単調減少であるから，これらは異なる $n-1$ 個の解である．

ところで，①，② より，$f_n(x)$ は x の $n-1$ 次式であることが帰納ほうにより確認され，$n-1$ 次方程式の解は高々 $n-1$ 個であるから，③ が方程式 $f_n(x)=0$ のすべての解である．すなわち

$$\boldsymbol{x=2\cos\frac{k\pi}{n}\quad(k=1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ n-1)}\qquad\cdots\cdots(\text{答})$$

である．