$a,\ b$ を整数とする．また，整数の数列 $\{c_n\}$ を $c_1=a,\ c_2=b$ および漸化式

$$c_{n+2}=c_{n+1}+c_n \quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

により定める．このとき，次の問いに答えよ．

(1) $a=39,\ b=13$ とする．このとき，二つの整数 c_5 と c_6 の最大公約数を求めよ．
(2) a と b はともに奇数であるとする．このとき，自然数 n に対して次の命題 P_n が成り立つことを，n についての数学的帰納法で示せ．

P_n：c_{3n-2} と c_{3n-1} はともに奇数であり，c_{3n} は偶数である．

(3) d を自然数とし，a と b はともに d の倍数であるとする．このとき，自然数 n に対して c_n が d の倍数になることを示せ．ただし，数学的帰納法を用いて証明すること．
(4) c_{2022} が奇数であるならば，$a+b$ も奇数であることを示せ．

(22 広島大 理系 3)

【答】
(1) 13
(2) 略
(3) 略
(4) 略

【解答】

$$c_1=a,\ c_2=b$$

$$c_{n+2}=c_{n+1}+c_n \quad (n \geqq 1) \qquad \cdots\cdots ①$$

(1) $a=39,\ b=13$ のとき，$\{c_n\}$ を順次計算すると

n	1	2	3	4	5	6
c_n	39	13	52	65	117	182

$$c_5=117=3^2\cdot 13$$
$$c_6=182=2\cdot 7\cdot 13$$

であるから，c_5 と c_6 の最大公約数は **13** である．　……(答)

- ① と互除法より，c_{n+2} と c_{n+1} の最大公約数は c_{n+1} と c_n の最大公約数に等しい．整数 $A,\ B$ の最大公約数を $(A,\ B)$ で表すと

$$(c_6,\ c_5)=(c_5,\ c_4)=\cdots=(c_2,\ c_1)=(13,\ 39)=13 \quad (\because\ 39=3\cdot 13)$$

(2) a と b がともに奇数であるとき

P_n：「c_{3n-2} と c_{3n-1} はともに奇数であり，c_{3n} は偶数である」

ことを n についての数学的帰納法で示す．

(i) $n=1$ のとき
$c_1=a,\ c_2=b$ はともに奇数 (与えられた条件) であり，$c_3=a+b$ は偶数であるから，P_1 は成り立つ．

(ii) $n=k$ での成立を仮定する．

$$c_{3(k+1)-2}=c_{3k+1}=c_{3k}+c_{3k-1}$$

帰納法の仮定より c_{3k}，c_{3k-1} はそれぞれ偶数，奇数であるから，c_{3k+1} は奇数である．

$$c_{3(k+1)-1}=c_{3k+2}=c_{3k+1}+c_{3k}$$

帰納法の仮定より c_{3k} は偶数であり，c_{3k+1} は奇数であるから，c_{3k+2} は奇数である．

$$c_{3(k+1)}=c_{3k+3}=c_{3k+2}+c_{3k+1}$$

c_{3k+2}，c_{3k+1} はともに奇数であるから，c_{3k+3} は偶数である．
　したがって，P_{k+1} は成り立つ．

以上，(i)，(ii) より，すべての自然数 n に対し命題 $P(n)$ は成り立つ．

(3) a と b がともに d の倍数であるとき

「c_nが d の倍数である」　…… $(*)$

ことを n についての数学的帰納法で示す．

(i) $n=1,\ 2$ のとき
　$c_1=a$，$c_2=b$ であり，a と b がともに d の倍数である (与えられた条件) から，$n=1,\ 2$ のとき，命題 $(*)$ は成り立つ．

(ii) $n=k,\ k+1$ での成立を仮定する．

$$c_{k+2}=c_{k+1}+c_k$$

帰納法の仮定より，c_{k+1}，c_k はともに d の倍数であるから，c_{k+2} も d の倍数である．
　したがって，$n=k+2$ のとき $(*)$ は成り立つ．

以上，(i)，(ii) より，すべての自然数 n に対し命題 $(*)$ は成り立つ．

(4) 背理法を用いる．$a+b$ が偶数であると仮定する．
$a+b$ が偶数となるのは，$a,\ b$ の偶奇が一致するときである．

(i) $a,\ b$ がともに奇数であるとき
　$c_{2022}=c_{3\cdot674}$ は (2) の命題より，c_{2022} は偶数である．c_{2022} が奇数であることに反する．

(ii) $a,\ b$ がともに偶数であるとき
　$a,\ b$ がともに 2 の倍数であるから，(3) の命題より，c_{2022} は 2 の倍数，すなわち偶数である．c_{2022} が奇数であることに反する．

以上より，$a+b$ は奇数である．　…… (証明終わり)