数列 $\{a_n\}$ を $a_1=2,\ a_{n+1}=\dfrac{1}{2}a_n+\dfrac{1}{a_n}$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ で定める．このとき，次の問いに答えよ．

(1) すべての自然数 n について，$a_n \geqq \sqrt{2}$ を示せ．
(2) すべての自然数 n について，$a_{n+1} \leqq a_n$ を示せ．

(22 東北学院大 文系 A 6)

【答】

(1) 略
(2) 略

【解答】

$$a_1=2,\ a_{n+1}=\frac{1}{2}a_n+\frac{1}{a_n}$$

(1) すべての自然数 n について,「$a_n \geqq \sqrt{2}$ ⋯⋯ $(*)$」であることを数学的帰納法で示す．

(i) $n=1$ のとき

$$a_1=2>\sqrt{2}$$

であり，$n=1$ のとき $(*)$ は成り立つ．

(ii) $n=k$ での成立を仮定する．

数学的帰納法により，すべての自然数について $a_n>0$ が確認されるから，平方根をとることができる．

$$a_{n+1}-\sqrt{2}=\left(\frac{1}{2}a_n+\frac{1}{a_n}\right)-\sqrt{2}=\left(\sqrt{\frac{a_n}{2}}-\frac{1}{\sqrt{a_n}}\right)^2 \geqq 0$$

$n=k$ のときも $(*)$ は成り立つ．

(i)，(ii) より，すべての自然数について $(*)$ は成り立つ． ⋯⋯ (証明終わり)

- (ii) ついては，$a_n>0$ を確認した後，相加平均・相乗平均の関係を用いてもよい．

$$a_{n+1}=\frac{1}{2}a_n+\frac{1}{a_n} \geqq 2\sqrt{\frac{1}{2}a_n\cdot\frac{1}{a_n}}=\sqrt{2}$$

である．

(2) 辺々の差をとると

$$\begin{aligned}a_n-a_{n+1}&=a_n-\left(\frac{1}{2}a_n+\frac{1}{a_n}\right)\\&=\frac{1}{2}a_n-\frac{1}{a_n}\\&=\frac{(a_n-\sqrt{2})(a_n+\sqrt{2})}{2a_n}\\&\geqq 0 \quad (\because\ (1))\end{aligned}$$

よって，すべての自然数 n について，$a_{n+1} \leqq a_n$ が成り立つ． ⋯⋯ (証明終わり)

- 遠回りなるが，数学的帰納法で示すこともできる．

「$a_{n+1} \leqq a_n$ ⋯⋯ $(**)$」

(i) $n=1$ のとき

$$a_2=\frac{1}{2}a_1+\frac{1}{a_1}=\frac{1}{2}\cdot 2+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$$

$a_1=2$ であるから，$n=1$ のとき $(**)$ は成り立つ．

(ii) $n=k$ での成立を仮定する．

$$\begin{aligned}a_{k+1}-a_{k+2}&=\left(\frac{1}{2}a_k+\frac{1}{a_k}\right)-\left(\frac{1}{2}a_{k+1}+\frac{1}{a_{k+1}}\right)\\&=\frac{a_k-a_{k+1}}{2}+\frac{a_{k+1}-a_k}{a_ka_{k+1}}\\&=\frac{(a_k-a_{k+1})(a_ka_{k+1}-2)}{2a_ka_{k+1}}\end{aligned}$$

帰納法の仮定より $a_k-a_{k+1}\geqq 0$ であり，(1) より $a_ka_{k+1}-2\geqq\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}-2=0$ かつ $2a_ka_{k+1}\geqq 2\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}=4>0$ であるから

$$a_{k+1}-a_{k+2}\geqq 0$$

が成り立つ．したがって，$n=k$ のときも $(**)$ は成り立つ．

(i)，(ii) より，すべての自然数について $(**)$ は成り立つ．