以下で表される数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めなさい．解答欄には途中の計算過程も書きなさい．

$$a_1 = 0, \quad a_{n+1} = 4a_n + n \cdot 2^n \quad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

(22 公立千歳科技大 中期 理工 4)

【答】 $a_n = 2^{2n-1} - (n+1)2^{n-1}$

【解答】

$$a_1 = 0, \quad a_{n+1} = 4a_n + n \cdot 2^n \qquad \cdots\cdots ①$$

$$\alpha(n+1) = 4\alpha(n) + n \cdot 2^n \qquad \cdots\cdots ②$$

② を満たす関数 $\alpha(n)$ がみつかれば，①，② の辺々を引くことにより

$$a_{n+1} - \alpha(n+1) = 4\{a_n - \alpha(n)\} \qquad \cdots\cdots ③$$

すなわち，公比 4 の等比数列 $\{a_n - \alpha(n)\}$ を得ることができる．

定数 p，q を用いて $\alpha(n) = (pn+q)2^n$ とおくと，② は

$$\{p(n+1)+q\}2^{n+1} = 4(pn+q)2^n + n \cdot 2^n$$

$$2pn + 2p + 2q = (4p+1)n + 4q$$

これがすべての自然数 n に対して成り立つ条件は

$$\begin{cases} 2p = 4p + 1 \\ 2p + 2q = 4q \end{cases} \qquad \therefore \quad p = q = -\frac{1}{2}$$

したがって，$\alpha(n) = \left(-\dfrac{1}{2}n - \dfrac{1}{2}\right)2^n$ とおくと ③ は

$$a_{n+1} + \left(\frac{n+1}{2} + \frac{1}{2}\right)2^{n+1} = 4\left\{a_n + \left(\frac{n}{2} + \frac{1}{2}\right)2^n\right\}$$

となる．数列 $\left\{a_n + \left(\dfrac{n}{2} + \dfrac{1}{2}\right)2^n\right\}$ は初項 $0 + \left(\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}\right)2 = 2$，公比 4 の等比数列であるから

$$a_n + \left(\frac{n}{2} + \frac{1}{2}\right)2^n = 2 \cdot 4^{n-1}$$

$$\therefore \quad \boldsymbol{a_n = 2^{2n-1} - (n+1)2^{n-1}} \qquad \cdots\cdots(答)$$

を得る．

- ① の辺々を 4^{n+1} で割ると

  $$\frac{a_{n+1}}{4^{n+1}} = \frac{a_n}{4^n} + \frac{n}{4 \cdot 2^n}$$

  $n \geqq 2$ のとき

  $$\frac{a_n}{4^n} = \frac{a_1}{4} + \frac{1}{4}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{k}{2^k} = 0 + \frac{1}{4}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{k}{2^k}$$

  $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}\frac{k}{2^k}$ とおくと

  $$S_n = \frac{1}{2} + \frac{2}{2^2} + \frac{3}{2^3} + \cdots + \frac{n-1}{2^{n-1}}$$

  $$\frac{1}{2}S_n = \qquad \frac{1}{2^2} + \frac{2}{2^3} + \cdots + \frac{n-2}{2^{n-1}} + \frac{n-1}{2^n}$$

辺々ひくと

$$\frac{1}{2}S_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}} - \frac{n-1}{2^n}$$

$$\therefore \quad S_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^{n-2}} - \frac{n-1}{2^{n-1}}$$

$$= \frac{1 - \dfrac{1}{2^{n-1}}}{1 - \dfrac{1}{2}} - \frac{n-1}{2^{n-1}}$$

$$= 2 - \frac{2}{2^{n-1}} - \frac{n-1}{2^{n-1}}$$

$$= 2 - \frac{n+1}{2^{n-1}}$$

であり

$$\frac{a_n}{4^n} = \frac{1}{4}\left(2 - \frac{n+1}{2^{n-1}}\right)$$

$$\therefore \quad a_n = 2 \cdot 4^{n-1} - (n+1)2^{n-1} = 2^{2n-1} - (n+1)2^{n-1}$$

これは $n = 1$ のときも成り立つ．

よって，$\{a_n\}$ の一般項は

$$a_n = 2^{2n-1} - (n+1)2^{n-1}$$

である．