x, y についての方程式

$$x^2 - 6xy + y^2 = 9 \qquad \cdots\cdots\ (*)$$

に関する次の問いに答えよ．

(1) x, y がともに正の整数であるような $(*)$ の解のうち，y が最小であるものを求めよ．
(2) 数列 a_1，a_2，a_3，$\cdots$ が漸化式

$$a_{n+2} - 6a_{n+1} + a_n = 0 \quad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

を満たすとする．このとき，$(x,\ y) = (a_{n+1},\ a_n)$ が $(*)$ を満たすならば，
$(x,\ y) = (a_{n+2},\ a_{n+1})$ も $(*)$ を満たすことを示せ．
(3) $(*)$ の整数解 $(x,\ y)$ は無数に存在することを示せ．

(22 千葉大 7)

【答】
(1) $x = 18,\ y = 3$
(2) 略
(3) 略

【解答】

$$x^2 - 6xy + y^2 = 9 \qquad \cdots\cdots\ (*)$$

(1) $(*)$ を x について解くと

$$x = 3x \pm \sqrt{8y^2 + 9}$$

である．y に正の整数を順次代入していく．

$y = 1$ のとき　$x = 3 \pm \sqrt{17}$　x は無理数であり不適．
$y = 2$ のとき　$x = 6 \pm \sqrt{41}$　x は無理数であり不適．
$y = 3$ のとき　$x = 9 \pm \sqrt{81} = 18,\ 0$　$x = 18$ は正の整数である．

以上より，x, y がともに正の整数であるような $(*)$ の解のうち，y が最小であるものは

$$\boldsymbol{x = 18,\ y = 3} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．

(2) 数列 $\{a_n\}$ が

$$a_{n+2} - 6a_{n+1} + a_n = 0 \quad (n \geqq 1) \qquad \cdots\cdots\ ①$$

を満たし，さらに $(x,\ y) = (a_{n+1},\ a_n)$ は $(*)$ を満たすとき，すなわち，数列 $\{a_n\}$ が

$$① \text{ かつ } {a_{n+1}}^2 - 6a_{n+1}a_n + {a_n}^2 = 9 \qquad \cdots\cdots\ ②$$

を満たすとき

$$\begin{aligned}
&{a_{n+2}}^2 - 6a_{n+2}a_{n+1} + {a_{n+1}}^2 \\
&= (6a_{n+1} - a_n)^2 - 6(6a_{n+1} - a_n)a_{n+1} + {a_{n+1}}^2 \\
&= (36{a_{n+1}}^2 - 12a_{n+1}a_n + {a_n}^2) - (36{a_{n+1}}^2 - 6a_{n+1}a_n) + {a_{n+1}}^2 \\
&= {a_{n+1}}^2 - 6a_{n+1}a_n + {a_n}^2 \\
&= 9 \quad (\because\ ②)
\end{aligned}$$

が成り立つ．

よって，$(x,\ y) = (a_{n+2},\ a_{n+1})$ も $(*)$ を満たす．　$\cdots\cdots$ (証明終わり)

(3) $(a_2,\ a_1)=(18,\ 3)$ とおくと，$(a_2,\ a_1)$ は $(*)$ を満たす．したがって

「$a_1=3,\ a_2=18$ かつ ①」

を満たす数列 $\{a_n\}$ について，各項 a_n はすべて整数であり，(2) より整数の組 $(a_{n+1},\ a_n)$ $(n \geqq 1)$ はすべて $(*)$ の整数解である．

次に，すべての自然数 n について

「$0<a_n<a_{n+1}$」…… $(**)$

が成り立つことを数学的帰納法を用いて示す．

(i) $n=1$ のとき

$a_1=3,\ a_2=18$ であり，$n=1$ のとき $(**)$ は成り立つ．

(ii) $n=k$ での成立を仮定すると

$$\begin{aligned}a_{k+2}-a_{k+1}&=(6a_{k+1}-a_k)-a_{k+1}\\&=5a_{k+1}-a_k\\&=4a_{k+1}+(a_{k+1}-a_k)\\&>4\cdot 1+0 \quad (\because\ \text{帰納法の仮定})\\&>0\end{aligned}$$

であり，$n=k+1$ のときも $(**)$ は成り立つ．

以上 (i)，(ii) より，すべての自然数 n について $(**)$ が成り立つ．

よって，$(a_{n+1},\ a_n)$ $(n \geqq 1)$ はすべて $(*)$ を満たし $1<a_1<a_2<a_3<\cdots$ であるから，$(*)$ の整数解 $(x,\ y)$ は無数に存在する． ……(証明終わり)