次の条件によって定められる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ．

$$a_1 = 1, \quad a_{n+1} = 2a_n + n \quad (n = 1,\ 2,\ \cdots)$$

(22 弘前大 理工 7(2))

【答】 $a_n = 3 \cdot 2^{n-1} - n - 1 \quad (n \geqq 1)$

【解答】

$$a_1 = 1 \qquad \cdots\cdots ①$$

$$a_{n+1} = 2a_n + n \qquad \cdots\cdots ②$$

② の形にあわせて

$$\alpha(n+1) = 2\alpha(n) + n \qquad \cdots\cdots ③$$

をみたす自然数 n の関数 $\alpha(n)$ をみつける．$\alpha(n)$ がみつかると，② − ③ より，③ は

$$a_{n+1} - \alpha(n+1) = 2\{a_n - \alpha(n)\}$$

と変形することができる．

$\alpha(n)$ を 1 次の一般式 $\alpha(n) = pn + q$ (p, q は定数) とおくと，③ は

$$p(n+1) + q = 2(pn + q) + n$$

となる．これがすべての自然数 n について成り立つ条件は

$$\begin{cases} p = 2p + 1 \\ p + q = 2q \end{cases} \qquad \therefore \quad p = -1, \quad q = -1$$

である．$\alpha(n) = -n - 1$ を用いると，③ は

$$a_{n+1} + (n+1) + 1 = 2(a_n + n + 1)$$

と変形できる．数列 $\{a_n + n + 1\}$ は初項 $a_1 + 1 + 1 = 3$ ($\because$ ①)，公比 2 の等比数列であるから

$$a_n + n + 1 = 3 \cdot 2^{n-1}$$

$$\therefore \quad \boldsymbol{a_n = 3 \cdot 2^{n-1} - n - 1} \quad (n \geqq 1) \qquad \cdots\cdots(答)$$

である．

- 解法はいろいろある．

  (別解 1)
  $$a_{n+1} = 2a_n + n$$
  $$a_{n+2} = 2a_{n+1} + n + 1$$

  差をとると

  $$a_{n+2} - a_{n+1} = 2(a_{n+1} - a_n) + 1$$

  $b_n = a_{n+1} - a_n$ とおくと

  $$b_1 = a_2 - a_1 = (2a_1 + 1) - a_1 = a_1 + 1 = 2$$
  $$b_{n+1} = 2b_n + 1$$

  となり，$b_{n+1} + 1 = 2(b_n + 1)$ と変形して，これを解くと

  $$b_n + 1 = 3 \cdot 2^{n-1}$$
  $$\therefore \quad b_n = 3 \cdot 2^{n-1} - 1$$
  $$\therefore \quad a_{n+1} - a_n = 3 \cdot 2^{n-1} - 1$$

  を得る．② を代入すると

  $$(2a_n + n) - a_n = 3 \cdot 2^{n-1} - 1$$
  $$\therefore \quad a_n = 3 \cdot 2^{n-1} - n - 1$$

  である．

(別解 2) ② の辺々を 2^{n+1} で割ると

$$\frac{a_{n+1}}{2^{n+1}} = \frac{a_n}{2^n} + \frac{n}{2^{n+1}}$$

$n \geqq 2$ のとき

$$\frac{a_n}{2^n} = \frac{a_1}{2} + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{k}{2^{k+1}}$$

ここで，$S_n = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{k}{2^{k+1}}$ とおくと

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{1}{2^2} + \frac{2}{2^3} + \cdots + \frac{n-1}{2^n} \\ \frac{1}{2}S_n &= \phantom{\frac{1}{2^2} + {}} \frac{1}{2^3} + \cdots + \frac{n-2}{2^n} + \frac{n-1}{2^{n+1}} \end{aligned}$$

辺々ひくと

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}S_n &= \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \cdots + \frac{1}{2^n} - \frac{n-1}{2^{n+1}} \\ &= \frac{1}{2^2}\,\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}}{1-\frac{1}{2}} - \frac{n-1}{2^{n+1}} \\ &= \frac{1}{2}\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} - \frac{n-1}{2^n}\right\} \end{aligned}$$

$$\therefore \quad S_n = 1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} - \frac{n-1}{2^n}$$

これより

$$\begin{aligned} \frac{a_n}{2^n} &= \frac{1}{2} + \left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} - \frac{n-1}{2^n}\right\} \\ &= \frac{3}{2} - \frac{n+1}{2^n} \end{aligned}$$

これは $n=1$ のときも成り立つ．

$$\therefore \quad a_n = 3\cdot 2^{n-1} - n - 1 \quad (n \geqq 1)$$

である．