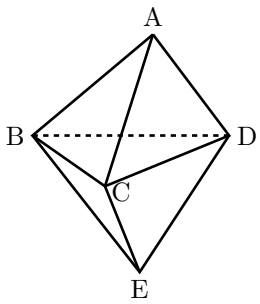
図のような六面体 ABCDE の辺上を動く点 P がある．P は，頂点 A を出発点とし，1 回の移動で，そのときにいる頂点から 1 辺で結ばれた隣の頂点のいずれか 1 つに等確率で移動する．ただし，同じ頂点に留まることはないとする．$n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots$ に対して，P が n 回目の移動後に A，B，C，D，E にいる確率を，それぞれ $a_n,\ b_n,\ c_n,\ d_n,\ e_n$ とする．例えば，A から 1 辺で結ばれた隣の頂点とは，B，C，D であり，1 回目の移動で P はこのいずれか 1 つに等確率で移動する．従って，$a_1=e_1=0,\ b_1=c_1=d_1=\dfrac{1}{3}$ である．



(1) $a_2,\ b_2,\ c_2,\ d_2,\ e_2$ を求めよ．

(2) $a_{n+1},\ b_{n+1},\ c_{n+1},\ d_{n+1},\ e_{n+1}$ を，$a_n,\ b_n,\ c_n,\ d_n,\ e_n$ を用いて表せ．

(3) 数学的帰納法を用いて，$b_n=c_n=d_n\ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ が成り立つことを証明せよ．

(4) $q_n=b_{n+1}-b_n$ とおくとき．q_n を n を用いて表せ．

(5) $n=2,\ 3,\ 4,\ \cdots$ に対して，$a_n,\ b_n$ を n を用いて表せ．

(22 東京海洋大 海洋工 3)

【答】

(1) $a_2=\dfrac{1}{4},\ b_2=\dfrac{1}{6},\ c_2=\dfrac{1}{6},\ d_2=\dfrac{1}{6},\ e_2=\dfrac{1}{4}$

(2) $a_{n+1}=\dfrac{1}{4}b_n+\dfrac{1}{4}c_n+\dfrac{1}{4}d_n,$

$b_{n+1}=\dfrac{1}{3}a_n+\dfrac{1}{4}c_n+\dfrac{1}{4}d_n+\dfrac{1}{3}e_n,$

$c_{n+1}=\dfrac{1}{3}a_n+\dfrac{1}{4}b_n+\dfrac{1}{4}d_n+\dfrac{1}{3}e_n,$

$d_{n+1}=\dfrac{1}{3}a_n+\dfrac{1}{4}b_n+\dfrac{1}{4}c_n+\dfrac{1}{3}e_n,$

$e_{n+1}=\dfrac{1}{4}b_n+\dfrac{1}{4}c_n+\dfrac{1}{4}d_n$

(3) 略

(4) $q_n=-\dfrac{1}{6}\left(-\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}$

(5) $a_n=\dfrac{1}{6}+\dfrac{1}{3}\left(-\dfrac{1}{2}\right)^{n},\quad b_n=\dfrac{2}{9}+\dfrac{1}{9}\left(-\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}$

【解答】

(1) 2 回目の移動後に点 P が点 A にいるのは，1 回目の移動後に点 B，点 C，点 D のいずれかにいて，2 回目の移動で点 A に移動する場合だから

$$a_2=b_1\cdot\frac{1}{4}+c_1\cdot\frac{1}{4}+d_1\cdot\frac{1}{4}=3\times\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4}=\boldsymbol{\frac{1}{4}}\qquad\cdots\cdots(答)$$

である．同様にして

$$b_2=c_1\cdot\frac{1}{4}+d_1\cdot\frac{1}{4}=\boldsymbol{\frac{1}{6}}\qquad\cdots\cdots(答)$$

$$c_2=b_1\cdot\frac{1}{4}+d_1\cdot\frac{1}{4}=\boldsymbol{\frac{1}{6}}\qquad\cdots\cdots(答)$$

$$d_2=b_1\cdot\frac{1}{4}+c_1\cdot\frac{1}{4}=\boldsymbol{\frac{1}{6}}\qquad\cdots\cdots(答)$$

$$e_2=b_1\cdot\frac{1}{4}+c_1\cdot\frac{1}{4}+d_1\cdot\frac{1}{4}=\boldsymbol{\frac{1}{4}}\qquad\cdots\cdots(答)$$

である．

(2) (1) と同様に考えて

$$\boldsymbol{a_{n+1} = \frac{1}{4}b_n + \frac{1}{4}c_n + \frac{1}{4}d_n} \quad \cdots\cdots ① \qquad \cdots\cdots(答)$$

$$\boldsymbol{b_{n+1} = \frac{1}{3}a_n + \frac{1}{4}c_n + \frac{1}{4}d_n + \frac{1}{3}e_n} \quad \cdots\cdots ② \qquad \cdots\cdots(答)$$

$$\boldsymbol{c_{n+1} = \frac{1}{3}a_n + \frac{1}{4}b_n + \frac{1}{4}d_n + \frac{1}{3}e_n} \quad \cdots\cdots ③ \qquad \cdots\cdots(答)$$

$$\boldsymbol{d_{n+1} = \frac{1}{3}a_n + \frac{1}{4}b_n + \frac{1}{4}c_n + \frac{1}{3}e_n} \quad \cdots\cdots ④ \qquad \cdots\cdots(答)$$

$$\boldsymbol{e_{n+1} = \frac{1}{4}b_n + \frac{1}{4}c_n + \frac{1}{4}d_n} \quad \cdots\cdots ⑤ \qquad \cdots\cdots(答)$$

である．

(3) すべての自然数 n に対して「$b_n = c_n = d_n$」$\cdots\cdots$ $(*)$ が成り立つことを数学的帰納法で示す．

(i) $b_1 = c_1 = d_1 = \dfrac{1}{3}$ より，$n = 1$ のとき $(*)$ は成り立つ．

(ii) $n = k$ での成立を仮定する．このとき

$$b_{k+1} = \frac{1}{3}a_k + \frac{1}{4}c_k + \frac{1}{4}d_k + \frac{1}{3}e_k = \frac{1}{3}a_k + \frac{2}{4}b_k + \frac{1}{3}e_k$$
$$c_{k+1} = \frac{1}{3}a_k + \frac{1}{4}b_k + \frac{1}{4}d_k + \frac{1}{3}e_k = \frac{1}{3}a_k + \frac{2}{4}b_k + \frac{1}{3}e_k$$
$$d_{k+1} = \frac{1}{3}a_k + \frac{1}{4}b_k + \frac{1}{4}c_k + \frac{1}{3}e_k = \frac{1}{3}a_k + \frac{2}{4}b_k + \frac{1}{3}e_k$$

であり，$n = k + 1$ のときも $(*)$ は成り立つ．

(i)，(ii) より，すべての自然数 n に対して $(*)$ は成り立つ．

(4) (3) より，①〜⑤は

$$\begin{cases} a_{n+1} = \dfrac{3}{4}b_n & \cdots\cdots ⑥ \\ b_{n+1} = \dfrac{1}{3}a_n + \dfrac{1}{2}b_n + \dfrac{1}{3}e_n & \cdots\cdots ⑦ \\ e_{n+1} = \dfrac{3}{4}b_n & \cdots\cdots ⑧ \end{cases}$$

と整理される．⑦より

$$\begin{aligned} b_{n+2} &= \frac{1}{3}a_{n+1} + \frac{1}{2}b_{n+1} + \frac{1}{3}e_{n+1} \\ &= \frac{1}{3}\cdot\frac{3}{4}b_n + \frac{1}{2}b_{n+1} + \frac{1}{3}\cdot\frac{3}{4}b_n \quad (\because ⑥,\ ⑧) \\ &= \frac{1}{2}b_{n+1} + \frac{1}{2}b_n \end{aligned}$$

が得られる．したがって

$$b_{n+2} - b_{n+1} = -\frac{1}{2}(b_{n+1} - b_n)$$

成り立つ．$q_n = b_{n+1} - b_n$ とおくと

$$q_{n+1} = -\frac{1}{2}q_n \quad (n \geqq 1)$$

となる．数列 $\{q_n\}$ は初項 $q_1 = b_2 - b_1 = \dfrac{1}{6} - \dfrac{1}{3} = -\dfrac{1}{6}$，公比 $-\dfrac{1}{2}$ の等比数列であるから

$$\boldsymbol{q_n = -\frac{1}{6}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}} \qquad \cdots\cdots(答)$$

である．

(5) (4) の結果より，$n \geqq 2$ のとき

$$\begin{aligned} b_n &= b_1 + \sum_{k=1}^{n-1} q_k \\ &= \frac{1}{3} - \frac{1}{6}\sum_{k=1}^{n-1}\left(-\frac{1}{2}\right)^{k-1} \\ &= \frac{1}{3} - \frac{1}{6}\cdot\frac{1-\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}}{1-\left(-\frac{1}{2}\right)} \\ &= \frac{2}{9} + \frac{1}{9}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} \end{aligned}$$

これは $n=1$ のときも成立する．よって

$$\boldsymbol{b_n = \frac{2}{9} + \frac{1}{9}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}} \quad (n \geqq 1) \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

⑥より，$n \geqq 2$ のとき

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{3}{4}b_{n-1} \\ &= \frac{3}{4}\left\{\frac{2}{9} + \frac{1}{9}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-2}\right\} \\ &= \boldsymbol{\frac{1}{6} + \frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n}} \quad (n \geqq 2) \qquad \cdots\cdots(\text{答}) \end{aligned}$$

である．

- (4) で数列 $\{b_n\}$ の 3 項間漸化式として

$$b_{n+2} - \frac{1}{2}b_{n+1} + \frac{1}{2}b_n = 0, \quad b_1 = \frac{1}{3},\ b_2 = \frac{1}{6}$$

が得た．これを解くヒントとして $q_n = b_{n+1} - b_n$ が与えられているが，このヒントなしでも一般項を求められるようにしておこう．

$b_{n+2} - \alpha b_{n+1} = \beta(b_{n+1} - \alpha b_n)$ となる定数 α, β を求めたい．展開して与えられた漸化式と係数を比較すると

$$\begin{cases} \alpha + \beta = \dfrac{1}{2} \\ \alpha\beta = \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

であり，α, β は

$$t^2 - \frac{1}{2}t + \frac{1}{2} = 0 \quad \text{の解} \quad t = -\frac{1}{2},\ 1$$

である．したがって，この漸化式は

$$b_{n+1} + \frac{1}{2}b_{n+1} = b_{n+1} + \frac{1}{2}b_n$$

$$b_{n+1} - b_{n+1} = -\frac{1}{2}(b_{n+1} - b_n) \quad (\text{これが (4) のヒント})$$

の 2 通りに変形される．それぞれから

$$b_{n+1} + \frac{1}{2}b_n = b_2 + \frac{1}{2}b_1 = \frac{1}{6} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3} = \frac{1}{3}$$

$$b_{n+1} - b_n = \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{3}\right)\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} = -\frac{1}{6}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n}$$

を得る．辺々ひくと

$$\frac{3}{2}b_n = \frac{1}{3} - \frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n}$$

$$\therefore \quad b_n = \frac{2}{9} + \frac{1}{9}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

である．