$0 \leqq \theta < \dfrac{\pi}{2}$ において $\tan\theta = \dfrac{4}{3}$ とする．$a_n = 5^n \cos n\theta$，$b_n = 5^n \sin n\theta$ に関して以下の問いに答えよ．ただし n を自然数とする．

(1) $\cos\theta$，$\sin\theta$ の値を求めよ．

(2) $a_2 + b_2$ の値を求めよ．

(3) a_{n+1}，b_{n+1} をそれぞれ a_n，b_n を用いて表せ．

(22 東北学院大 工 A 6)

【答】

(1) $\cos\theta = \dfrac{3}{5}$，$\sin\theta = \dfrac{4}{5}$

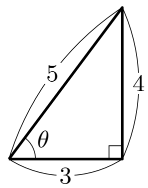
(2) 17

(3) $a_{n+1} = 3a_n - 4b_n$，$b_{n+1} = 4a_n + 3b_n$

【解答】

(1) $\tan\theta = \dfrac{4}{3}$ $\left(0 \leqq \theta < \dfrac{\pi}{2}\right)$ より，θ は右図の直角三角形と相似な三角形の内角である．よって

$$\boldsymbol{\cos\theta = \frac{3}{5}}, \quad \boldsymbol{\sin\theta = \frac{4}{5}} \qquad \cdots\cdots(答)$$



である．

(2) 2 倍角の公式より

$$a_2 = 5^2\cos 2\theta = 25(2\cos^2\theta - 1) = 25\left\{2\left(\frac{3}{5}\right)^2 - 1\right\} = 18 - 25 = -7,$$

$$b_2 = 5^2\sin 2\theta = 25\cdot 2\sin\theta\cos\theta = 25\cdot 2\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{3}{5} = 24$$

であり

$$a_2 + b_2 = -7 + 24 = \mathbf{17} \qquad \cdots\cdots(答)$$

である．

(3) 加法定理より

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= 5^{n+1}\cos(n+1)\theta \\ &= 5^{n+1}(\cos n\theta\cos\theta - \sin n\theta\sin\theta) \\ &= 5^{n+1}\left(\frac{3}{5}\cos n\theta - \frac{4}{5}\sin n\theta\right) \quad (\because\ (1)) \\ &= 3\cdot 5^n\cos n\theta - 4\cdot 5^n\sin n\theta \\ &= \boldsymbol{3a_n - 4b_n} \qquad \cdots\cdots(答) \end{aligned}$$

であり，同様にして

$$\begin{aligned} b_{n+1} &= 5^{n+1}\sin(n+1)\theta \\ &= 5^{n+1}(\sin n\theta\cos\theta + \cos n\theta\sin\theta) \\ &= 5^{n+1}\left(\frac{3}{5}\sin n\theta + \frac{4}{5}\cos n\theta\right) \quad (\because\ (1)) \\ &= 3\cdot 5^n\sin n\theta + 4\cdot 5^n\cos n\theta \\ &= 3b_n + 4a_n \\ &= \boldsymbol{4a_n + 3b_n} \qquad \cdots\cdots(答) \end{aligned}$$

である．

- $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ の一般項を求めておく．

$$a_1 = 5 \cdot \frac{3}{5} = 3,\ b_1 = 5 \cdot \frac{4}{5} = 4$$

$$\begin{cases} a_{n+1} = 3a_n - 4b_n \\ b_{n+1} = 4a_n + 3b_n \end{cases}$$

$\{a_n + tb_n\}$ が等比数列になるような定数 t を求める．

$$\begin{aligned} a_{n+1} + tb_{n+1} &= (3a_n - 4b_n) + t(4a_n + 3b_n) = (4t+3)a_n + (3t-4)b_n \\ &= (4t+3)\left(a_n + \frac{3t-4}{4t+3}b_n\right) \end{aligned}$$

$4t + 3 \fallingdotseq 0$ かつ $\dfrac{3t-4}{4t+3} = t$ をみたす t として $t = \pm i$ が得られる．

$t = i$ のとき，$\{a_n + ib_n\}$ は初項 $3 + 4i$，公比 $4i + 3$ の等比数列であるから

$$a_n + ib_n = (3+4i)(4i+3)^{n-1} = (3+4i)^n \qquad \cdots\cdots ①$$

$t = -i$ のとき，$\{a_n - ib_n\}$ は初項 $3 - 4i$，公比 $-4i + 3$ の等比数列であるから

$$a_n - ib_n = (3-4i)(-4i+3)^{n-1} = (3-4i)^n \qquad \cdots\cdots ②$$

①，② より

$$a_n = \frac{1}{2}\{(3+4i)^n + (3-4i)^n\}$$

$$b_n = -\frac{i}{2}\{(3+4i)^n - (3-4i)^n\}$$

を得る．