自然数 n に対して，以下で定義される x の 2 次関数 $f_n(x)$ がある．

$$f_1(x) = 3x^2$$
$$f_2(x) = 3x^2 + 4x$$
$$\vdots$$
$$f_{n+2}(x) = 3x^2 + 4x\int_0^1 f_{n+1}(t)\,dt - \int_0^1 f_n(t)\,dt \quad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

$a_n = \displaystyle\int_0^1 f_n(t)\,dt$ とおくとき，以下の問いに答えよ．

(1) a_1，a_2 の値を，それぞれ求めよ．

(2) a_{n+2} を，a_{n+1} と a_n を用いて表せ．

(3) $b_n = a_{n+1} - a_n$ とする．b_n と a_n を，それぞれ n の式で表し，2 次関数 $f_n(x)$ を求めよ．

(4) $x = \alpha$ で，$f_{n+1}(x) - f_n(x)$ は，すべての自然数 n に対して一定の値 β をとる．このとき，α と β の値を求めよ．また，2 つの曲線 $y = f_n(x)$ と $y = f_{n+1}(x)$，および直線 $x = \alpha$ で囲まれる図形の面積 S_n を求めよ．

(22 長崎大・工・歯・教育・薬・情報 5)

【答】

(1) $a_1 = 1,\ a_2 = 3$

(2) $a_{n+2} = 2a_{n+1} - a_n + 1$

(3) $b_n = n + 1$，$a_n = \dfrac{n(n+1)}{2}$，$f_n(x) = 3x^2 + 2n(n-1)x - \dfrac{(n-1)(n-2)}{2}$

(4) $\alpha = \dfrac{1}{4},\ \beta = 1$，$S_n = \dfrac{1}{8n}$

【解答】

(1) $a_n = \displaystyle\int_0^1 f_n(t)\,dt$ であるから

$$a_1 = \int_0^1 f_1(x)\,dx = \int_0^1 3t^2\,dt = \Big[t^3\Big]_0^1 = \mathbf{1} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

$$a_2 = \int_0^1 f_2(x)\,dx = \int_0^1 (3t^2 + 4t)\,dt = \Big[t^3 + 2t^2\Big]_0^1 = \mathbf{3} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．

(2)
$$\begin{aligned} f_{n+2}(x) &= 3x^2 + 4x\int_0^1 f_{n+1}(t)\,dt - \int_0^1 f_n(t)\,dt \\ &= 3x^2 + 4a_{n+1}x - a_n \qquad \cdots\cdots \text{①} \end{aligned}$$

であるから，① の辺々を積分すると

$$\int_0^1 f_{n+2}(t)\,dt = \int_0^1 (3t^2 + 4a_{n+1}t - a_n)\,dt$$

$$\begin{aligned} \therefore\quad \boldsymbol{a_{n+2}} &= \Big[t^3 + 2a_{n+1}t^2 - a_nt\Big]_0^1 \\ &= \boldsymbol{2a_{n+1} - a_n + 1} \qquad \cdots\cdots(\text{答}) \end{aligned}$$

となる．

(3) (2) の式は

$$a_{n+2}-a_{n+1}=(a_{n+1}-a_n)+1$$

と変形されるから，$b_n=a_{n+1}-a_n$ とおくと

$$b_{n+1}=b_n+1$$

である．数列 $\{b_n\}$ は初項 $b_1=a_2-a_1=3-1=2$，公差 1 の等差数列であるから

$$\boldsymbol{b_n}=2+(n-1)\cdot 1\boldsymbol{=n+1} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．これより，$n\geqq 2$ のとき

$$\begin{aligned} a_n&=a_1+\sum_{k=1}^{n-1}b_k=1+\sum_{k=1}^{n-1}(k+1)\\ &=1+\frac{(n-1)(2+n)}{2} \quad (\because \text{ 等差数列の和})\\ &=\frac{n(n+1)}{2} \end{aligned}$$

これは $n=1$ のときも成り立つ．したがって

$$\boldsymbol{a_n=\frac{n(n+1)}{2}} \quad (n\geqq 1) \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．① に代入すると

$$f_{n+2}(x)=3x^2+4\frac{(n+1)(n+2)}{2}x-\frac{n(n+1)}{2} \quad (n\geqq 1)$$

$$f_n(x)=3x^2+2n(n-1)x-\frac{(n-1)(n-2)}{2} \quad (n\geqq 3)$$

これは $n=1,\ n=2$ のときも成り立つ．よって

$$\boldsymbol{f_n(x)=3x^2+2n(n-1)x-\frac{(n-1)(n-2)}{2}} \quad (n\geqq 1) \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．

(4) (3) の結果より

$$\begin{aligned} &f_{n+1}(x)-f_n(x)\\ &=\left\{3x^2+2(n+1)nx-\frac{n(n-1)}{2}\right\}-\left\{3x^2+2n(n-1)x-\frac{(n-1)(n-2)}{2}\right\}\\ &=4nx-(n-1) \qquad \cdots\cdots ②\\ &=n(4x-1)+1 \end{aligned}$$

$f_{n+1}(x)-f_n(x)$ がすべての自然数 n に対して一定の値をとるのは $x=\dfrac{1}{4}$ のときであり，その値は 1 である．すなわち

$$\boldsymbol{\alpha=\frac{1}{4},\quad \beta=1} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．

$y=f_n(x)$ と $y=f_{n+1}(x)$ のグラフの交点の x 座標は

$$f_{n+1}(x)-f_n(x)=0 \qquad \therefore\quad x=\frac{n-1}{4n} \quad (\because\ ②)$$

である．$\dfrac{n-1}{4n}\leqq x\leqq\dfrac{1}{4}(=\alpha)$ では，$f_{n+1}(x)-f_n(x)=4nx-n+1\geqq 0$ が成り立つか

ら，2 つの曲線 $y=f_n(x)$ と $y=f_{n+1}(x)$，および直線 $x=\alpha$ で囲まれる図形の面積 S_n は

$$\begin{aligned}
S_n &= \int_{\frac{n-1}{4n}}^{\frac{1}{4}} \{f_{n+1}(x)-f_n(x)\}\,dx \\
&= \int_{\frac{n-1}{4n}}^{\frac{1}{4}} (4nx-n+1)\,dx \\
&= \Big[2nx^2-(n-1)x\Big]_{\frac{n-1}{4n}}^{\frac{1}{4}} \\
&= \frac{n}{8}-\frac{n-1}{4}-\left\{2n\frac{(n-1)^2}{16n^2}-(n-1)\frac{n-1}{4n}\right\} \\
&= \frac{-n+2}{8}+\frac{(n-1)^2}{8n} \\
&= \boldsymbol{\frac{1}{8n}} \qquad \cdots\cdots(\text{答})
\end{aligned}$$

である．