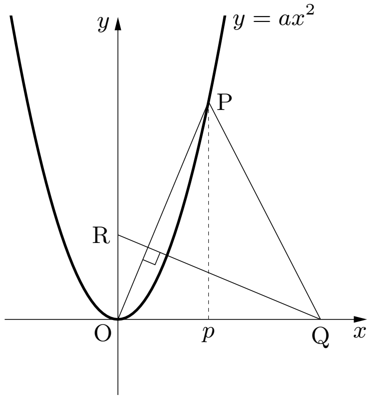
原点を O とする xy 平面内において，曲線 $y = ax^2$ $(a > 0)$ 上を動く点 P と，x 軸上の正の部分を動く点 Q は，OP $=$ OQ を満たす．また，y 軸上を動く点 R は OP $\perp$ QR を満たす．いま，点 P が第 1 象限にあって原点 O に限りなく近づくと，点 R は $\left(0,\ \dfrac{a-1}{2}\right)$ に近づく．このとき，a の値を求めなさい．

(22 公立千歳科技大 中期 理工 1(5))

【答】 $a = 2$

【解答】



$y = ax^2$ $(a > 0)$ 上を動く P は第 1 象限にあるから

$$\mathrm{P}\bigl(p,\ ap^2\bigr)\ (p > 0)$$

と表すことができる．

$$\begin{aligned}\mathrm{OP} &= \sqrt{p^2 + a^2p^4}\\ &= p\sqrt{1 + a^2p^2} \quad (\because\ p > 0)\end{aligned}$$

であり，x 軸の正の部分を動く点 Q の座標は，OP $=$ OQ を満たすから

$$\mathrm{Q}\bigl(p\sqrt{1 + a^2p^2},\ 0\bigr)$$

である．直線 OP の傾きは $\dfrac{ap^2}{p} = ap$ であり，Q から直線 OP に下ろした垂線の方程式は

$$y = -\frac{1}{ap}\left(x - p\sqrt{1 + a^2p^2}\right)$$

であるから，OP $\perp$ QR を満たす y 軸上の点 R の座標は

$$\mathrm{R}\left(0,\ \frac{\sqrt{1 + a^2p^2}}{a}\right)$$

である．

点 P が第 1 象限にあって原点 O に限りなく近づくと，点 R は $\left(0,\ \dfrac{a-1}{2}\right)$ に近づくから

$$\lim_{p \to 0} \frac{\sqrt{1 + a^2p^2}}{a} = \frac{a-1}{2}$$

が成り立つ．式を整理すると

$$\frac{1}{a} = \frac{a-1}{2} \iff 2 = a(a-1)$$

$$a^2 - a - 2 = 0 \qquad \therefore \quad (a-2)(a+1) = 0$$

$a > 0$ より

$$\boldsymbol{a = 2} \qquad \cdots\cdots(答)$$

である．