次の問いに答えよ．

(1) 3 次関数 $f(x)=x^3-12x^2+41x$ に対して，$f'(x)=0$ となる $x$ の値を求めよ．

(2) (1) で求めた $x$ の値の最小値を $x_1$，最大値を $x_2$ とする．$x_1$ 以上 $x_2$ 以下のすべての整数 $n$ に対して $(n,\ f(n))$ を求めよ．

(3) 3 次方程式 $x^3-12x^2+41x-m=0$ の 3 つの解がいずれも整数となるようなすべての $m$ と，それぞれの $m$ に対する解 $x$ を求めよ．

(22 東京海洋大 生命・資源 1)

---

【答】

(1) $x=\dfrac{12\pm\sqrt{21}}{3}$

(2) $(n,\ f(n))=(3,\ 42),\ (4,\ 36),\ (5,\ 30)$

(3) $\begin{cases} m=30 \text{ のとき，} & x=1,\ 5,\ 6 \\ m=42 \text{ のとき，} & x=2,\ 3,\ 7 \end{cases}$

---

【解答】

(1)
$$f(x)=x^3-12x^2+41x$$
$$f'(x)=3x^2-24x+41$$

$f'(x)=0$ となる $x$ の値は

$$\boldsymbol{x=\frac{12\pm\sqrt{21}}{3}} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．

(2) (1) の $x$ について，$x_1<x_2$ であるから

$$x_1=\frac{12-\sqrt{21}}{3},\quad x_2=\frac{12+\sqrt{21}}{3}$$

である．$16<21<25$ より，$4<\sqrt{21}<5$ であり

$$\frac{12-5}{3}<\frac{12-\sqrt{21}}{3}<\frac{12-4}{3} \qquad \therefore\ \frac{7}{3}<x_1<\frac{8}{3}$$
$$\frac{12+4}{3}<\frac{12+\sqrt{21}}{3}<\frac{12+5}{3} \qquad \therefore\ \frac{16}{3}<x_2<\frac{17}{3}$$

したがって，$x_1$ 以上 $x_2$ 以下の整数 $n$ は $n=3,\ 4,\ 5$ であり

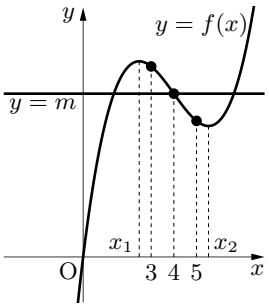
$$\boldsymbol{(n,\ f(n))=(3,\ 42),\ (4,\ 36),\ (5,\ 30)} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．

(3) 3 次方程式 $f(x)-m=0$ の実数解は，曲線 $y=f(x)$ と直線 $y=m$ のグラフの共有点の $x$ 座標である．

(1) より $f(x)$ の増減は下表となり，$y=f(x)$ と $y=m$ のグラフは右図となる．

| $x$ | $\cdots$ | $x_1$ | $\cdots$ | $x_2$ | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $+$ | 0 | $-$ | 0 | $+$ |
| $f(x)$ | ↗ | | ↘ | | ↗ |




3 つの解が整数となるような $m$ の値は，(2) より

$$m=42,\ 36,\ 30$$

のいずれかに限られる．

(i) $m=42$ のとき

$$x^3-12x^2+41x-42=0$$
$$(x-3)(x-2)(x-7)=0$$
$$\therefore\quad x=2,\ 3,\ 7$$

3 つの解はいずれも整数であり条件を満たす.

(ii) $m=36$ のとき

$$x^3-12x^2+41x-36=0$$
$$(x-4)(x^2-8x+9)=0$$
$$\therefore\quad x=4,\ 4\pm\sqrt{7}$$

3 つの解のうち整数でないものがあるから不適である.

(iii) $m=30$ のとき

$$x^3-12x^2+41x-30=0$$
$$(x-5)(x-1)(x-6)=0$$
$$\therefore\quad x=1,\ 5,\ 6$$

3 つの解はいずれも整数であり条件を満たす.

以上, (i), (ii), (iii) より

$$\begin{cases}\boldsymbol{m=30}\ \textbf{のとき,}\quad \boldsymbol{x=1,\ 5,\ 6}\\ \boldsymbol{m=42}\ \textbf{のとき,}\quad \boldsymbol{x=2,\ 3,\ 7}\end{cases}$$ ……(答)

である.