定積分 $\displaystyle\int_{-4}^{1}|x^2-2x-3|\,dx$ を求めよ．

(22 北海学園大 工 3(1))

【答】 $\dfrac{97}{3}$

【解答】

場合分けして絶対値をはずす．

$$\begin{aligned}|x^2-2x-3| &= |(x-3)(x+1)|\\ &= \begin{cases} x^2-2x-3 & (x \leqq -1,\ 3 \leqq x \text{ のとき})\\ -x^2+2x+3 & (-1 \leqq x \leqq 3 \text{ のとき})\end{cases}\end{aligned}$$

よって

$$\begin{aligned}\int_{-4}^{1}|x^2-2x-3|\,dx &= \int_{-4}^{-1}(x^2-2x-3)\,dx+\int_{-1}^{1}(-x^2+2x+3)\,dx\\ &= \left[\frac{1}{3}x^3-x^2-3x\right]_{-4}^{-1}-\left[\frac{1}{3}x^3-x^2-3x\right]_{-1}^{1}\\ &= 2\times\left(-\frac{1}{3}-1+3\right)-\left(-\frac{64}{3}-16+12\right)-\left(\frac{1}{3}-1-3\right)\\ &= \frac{10}{3}+\frac{76}{3}+\frac{11}{3}\\ &= \boldsymbol{\frac{97}{3}} \qquad \cdots\cdots(\text{答})\end{aligned}$$

である．

- 与えられた定積分は，曲線 $y=|x^2-2x-3|$ と x 軸，直線 $x=-4$, $x=1$ で囲まれた図形 (右図の斜線部分) の面積である．