$f(x)=\displaystyle\int_1^2 t|t-x|\,dt$ の最小値を求めなさい．解答欄には途中の計算過程も書きなさい．

(22 公立千歳科技大 中期 理工 2)

【答】 $\dfrac{18-5\sqrt{10}}{6}$

【解答】

$$f(x)=\int_1^2 t|t-x|\,dt$$

$t-x$ の符号の変わり目 $t=x$ が積分区間 $1\leqq t\leqq 2$ 内にあるか否かで場合分けする．

(i) $x<1$ のとき

$$f(x)=\int_1^2 t(t-x)\,dt=\left[\frac{t^3}{3}-x\frac{t^2}{2}\right]_1^2=-\frac{3}{2}x+\frac{7}{3}$$

$$f'(x)=-\frac{3}{2}$$

である．

(ii) $1\leqq x\leqq 2$ のとき

$$\begin{aligned}f(x)&=-\int_1^x t(t-x)\,dt+\int_x^2 t(t-x)\,dt\\&=-\left[\frac{t^3}{3}-x\frac{t^2}{2}\right]_1^x+\left[\frac{t^3}{3}-x\frac{t^2}{2}\right]_x^2\\&=-2\times\left(\frac{x^3}{3}-\frac{x^3}{2}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{x}{2}\right)+\left(\frac{8}{3}-2x\right)\\&=\frac{1}{3}x^3-\frac{5}{2}x+3\end{aligned}$$

$$f'(x)=x^2-\frac{5}{2}$$

である．

(iii) $x>2$ のとき

$$f(x)=-\int_1^2 t(t-x)\,dt=-\left[\frac{t^3}{3}-x\frac{t^2}{2}\right]_1^2=\frac{3}{2}x-\frac{7}{3}$$

$$f'(x)=\frac{3}{2}$$

である．

(i)，(ii)，(iii) より，$f(x)$ の増減は下表となる．

x	$\cdots$	1	$\cdots$	$\sqrt{\frac{5}{2}}$	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$-\frac{3}{2}$	$-\frac{3}{2}$	$-$	0	$+$	$\frac{3}{2}$	$\frac{3}{2}$
$f(x)$	$\searrow$	$\frac{5}{6}$	$\searrow$		$\nearrow$	$\frac{2}{3}$	$\nearrow$

よって，$f(x)$ は $x=\sqrt{\dfrac{5}{2}}$ のとき

$$\begin{aligned}\text{最小値 } f\left(\sqrt{\frac{5}{2}}\right)&=\frac{1}{3}\cdot\frac{5}{2}\sqrt{\frac{5}{2}}-\frac{5}{2}\sqrt{\frac{5}{2}}+3=3-\frac{2}{3}\cdot\frac{5}{2}\sqrt{\frac{5}{2}}\\&=\mathbf{\frac{18-5\sqrt{10}}{6}}\end{aligned}$$ ……(答)

をとる．