実数 a に対して，$f(a)$ を次で定める．

$$f(a)=\int_a^{a+1}|x^2-1|\,dx-\int_a^{a+1}\big||x|-1\big|\,dx$$

(1) $f(-2)$ と $f\left(\dfrac{1}{2}\right)$ の値を求めよ．

(2) a の値により場合分けして，$f(a)$ を求めよ．

(3) $f(a)$ の最小値を求めよ．

(22 東京海洋大 海洋工 4–I)

【答】

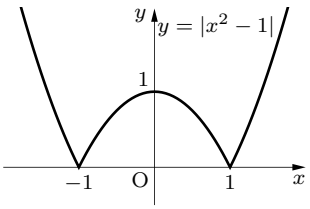
(1) $f(-2)=\dfrac{5}{6}$，$f\left(\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{1}{4}$

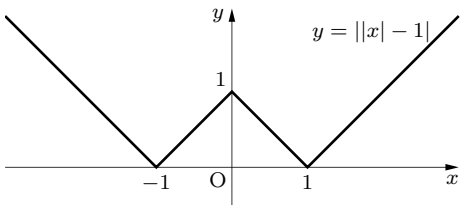
(2) $f(a)=\begin{cases} a^2+2a+\dfrac{5}{6} & (a\leqq -2 \text{ のとき}) \\ -\dfrac{2}{3}a^3-2a^2-2a-\dfrac{1}{2} & (-2\leqq a\leqq -1 \text{ のとき}) \\ \dfrac{1}{6} & (-1\leqq a\leqq 0 \text{ のとき}) \\ \dfrac{2}{3}a^3+\dfrac{1}{6} & (0\leqq a\leqq 1 \text{ のとき}) \\ a^2-\dfrac{1}{6} & (1\leqq a \text{ のとき}) \end{cases}$

(3) $\dfrac{1}{6}$

【解答】

(1) $y=|x^2-1|$ および $y=\big||x|-1\big|$ のグラフは下図のようになる．





積分区間における被積分関数の符号に注意すると

$$\begin{aligned} f(-2)&=\int_{-2}^{-1}(x^2-1)\,dx-\int_{-2}^{-1}(-x-1)\,dx \\ &=\int_{-2}^{-1}(x^2+x)dx=\left[\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2\right]_{-2}^{-1} \\ &=\frac{-1+8}{3}+\frac{1-4}{2}=\boldsymbol{\frac{5}{6}} \end{aligned}$$ ……(答)

$$\begin{aligned} f\left(\frac{1}{2}\right)&=\left\{\int_{\frac{1}{2}}^{1}(-x^2+1)\,dx+\int_1^{\frac{3}{2}}(x^2-1)\,dx\right\} \\ &\qquad-\left\{\int_{\frac{1}{2}}^{1}(-x+1)\,dx+\int_1^{\frac{3}{2}}(x-1)\,dx\right\} \\ &=\int_{\frac{1}{2}}^{1}(-x^2+x)\,dx+\int_1^{\frac{3}{2}}(x^2-x)\,dx \\ &=\left[-\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2\right]_{\frac{1}{2}}^{1}+\left[\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2\right]_1^{\frac{3}{2}} \\ &=2\left(-\frac{1}{3}+\frac{1}{2}\right)-\left(-\frac{1}{24}+\frac{1}{8}\right)+\left(\frac{9}{8}-\frac{9}{8}\right)=\boldsymbol{\frac{1}{4}} \end{aligned}$$ ……(答)

である．

(2) 積分区間 $a \leqq x \leqq a+1$ を移動させながら，$x=-1,\ 1$ を基準に場合分けする．

(i) $a+1 \leqq -1$ $(a \leqq -2)$ のとき

$$\begin{aligned} f(a) &= \int_a^{a+1} (x^2-1)\,dx - \int_a^{a+1} (-x-1)\,dx \\ &= \int_a^{a+1} (x^2+x)\,dx = \Big[\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2\Big]_a^{a+1} \\ &= \frac{(a+1)^3-a^3}{3} + \frac{(a+1)^2-a^2}{2} \\ &= a^2+2a+\frac{5}{6} \end{aligned}$$

(ii) $a \leqq -1 \leqq a+1$ $(-2 \leqq a \leqq -1)$ のとき

$$\begin{aligned} f(a) &= \left\{\int_a^{-1} (x^2-1)\,dx + \int_{-1}^{a+1} (-x^2+1)\,dx\right\} \\ &\qquad - \left\{\int_a^{-1} (-x-1)\,dx + \int_{-1}^{a+1} (x+1)\,dx\right\} \\ &= \int_a^{-1} (x^2+x)\,dx + \int_{-1}^{a+1} (-x^2-x)\,dx \\ &= \Big[\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2\Big]_a^{-1} + \Big[-\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2\Big]_{-1}^{a+1} \\ &= 2\left(\frac{-1}{3}+\frac{1}{2}\right) - \left(\frac{a^3}{3}+\frac{a^2}{2}\right) + \left\{-\frac{(a+1)^3}{3} - \frac{(a+1)^2}{2}\right\} \\ &= \frac{1}{3} - \left(\frac{a^3}{3}+\frac{a^2}{2}\right) + \left(-\frac{a^3}{3} - \frac{3}{2}a^2 - 2a - \frac{5}{6}\right) \\ &= -\frac{2}{3}a^3 - 2a^2 - 2a - \frac{1}{2} \end{aligned}$$

(iii) $\begin{cases} -1 \leqq a \\ a+1 \leqq 1 \end{cases}$ $(-1 \leqq a \leqq 0)$ のとき

$$\begin{aligned} f(a) &= \int_a^{a+1} (-x^2+1)\,dx - \left\{\int_a^0 (x+1)\,dx + \int_0^{a+1} (-x+1)\,dx\right\} \\ &= \int_a^0 (-x^2-x)\,dx + \int_0^{a+1} (-x^2+x)\,dx \\ &= \Big[\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2\Big]_0^a - \Big[\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2\Big]_0^{a+1} \\ &= \frac{a^3}{3} + \frac{a^2}{2} - \frac{(a+1)^3}{3} + \frac{(a+1)^2}{2} \\ &= \frac{1}{6} \end{aligned}$$

(iv) $a \leqq 1 \leqq a+1$ $(0 \leqq a \leqq 1)$ のとき

$$\begin{aligned}
f(a) &= \left\{\int_a^1 (-x^2+1)\,dx + \int_1^{a+1} (x^2-1)\,dx\right\} \\
&\qquad - \left\{\int_a^1 (-x+1)\,dx + \int_1^{a+1} (x-1)\,dx\right\} \\
&= \int_a^1 (-x^2+x)\,dx + \int_1^{a+1} (x^2-x)\,dx \\
&= \Big[-\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2\Big]_a^1 - \Big[-\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2\Big]_1^{a+1} \\
&= 2\cdot\frac{1}{6} - \left(-\frac{a^3}{3}+\frac{a^2}{2}\right) - \left\{-\frac{(a+1)^3}{3}+\frac{(a+1)^2}{2}\right\} \\
&= \frac{1}{3} + \left(\frac{a^3}{3}-\frac{a^2}{2}\right) - \left(-\frac{a^3}{3}-\frac{a^2}{2}+\frac{1}{6}\right) \\
&= \frac{2}{3}a^3+\frac{1}{6}
\end{aligned}$$

(v) $1 \leqq a$ のとき

$$\begin{aligned}
f(a) &= \int_a^{a+1} (x^2-1)\,dx - \int_a^{a+1} (x-1)\,dx \\
&= \int_a^{a+1} (x^2-x)\,dx = \Big[\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2\Big]_a^{a+1} \\
&= \frac{(a+1)^3-a^3}{3} - \frac{(a+1)^2-a^2}{2} \\
&= a^2-\frac{1}{6}
\end{aligned}$$

(i)〜(v) をまとめて

$$\boldsymbol{f(a) = \begin{cases} a^2+2a+\dfrac{5}{6} & (a \leqq -2 \text{ のとき}) \\ -\dfrac{2}{3}a^3-2a^2-2a-\dfrac{1}{2} & (-2 \leqq a \leqq -1 \text{ のとき}) \\ \dfrac{1}{6} & (-1 \leqq a \leqq 0 \text{ のとき}) \\ \dfrac{2}{3}a^3+\dfrac{1}{6} & (0 \leqq a \leqq 1 \text{ のとき}) \\ a^2-\dfrac{1}{6} & (1 \leqq a \text{ のとき}) \end{cases}}$$ ……(答)

である．

(3) $a \leqq -2$ のとき

$$f(a) = (a+1)^2 - \frac{1}{6}$$

$-2 \leqq a \leqq -1$ のとき，

$$f'(a) = -2a^2-4a-2 = -2(a+1)^2 < 0 \ (-2 < a < -1)$$

であるから，あわせて $a \leqq -1$ の範囲で $f(a)$ は単調減少である．

$-1 \leqq a \leqq 0$ のとき，

$$f(a) = \frac{1}{6} \ (\text{一定})$$

$0 \leqq a$ のとき，$f(a)$ は単調増加である．

よって，$f(a)$ は $-1 \leqq a \leqq 0$ において

最小値 $\boldsymbol{\dfrac{1}{6}}$ ……(答)

をとる．

- $y = x^2 - 1$ と $y = |x| - 1$ のグラフはともに y 軸対称であるから，$f(a)$ は

$$\frac{a + (a+1)}{2} = 0,\ \text{すなわち}\ a = -\frac{1}{2}$$

に関して対称である．

最小値は $a \geqq -\dfrac{1}{2}$ で考えればよく，(2) より $f(a)$ は

$-\dfrac{1}{2} \leqq a \leqq 0$ のとき，$\dfrac{1}{6}$

$0 \leqq a$ のとき，単調に増加し，$f(a) \geqq f(0) = \dfrac{1}{6}$

である．したがって，求める最小値は $\dfrac{1}{6}$ である．

- $b = f(a)$ のグラフは下図の実線部分となる．