$a,\ b,\ c$ は定数，$f(x)$ は x の整式で次数が 2 以下とし，次の等式を考える．

$$f(x) = x^2 + ax + b + \int_c^x f(t)\,dt. \qquad \cdots\cdots (*)$$

このとき，次の問いに答えよ．

(1) $f(x)$ の次数が 0 または 2 の場合には等式 $(*)$ が成り立たないことを示せ．
(2) $f(x)$ を x と a を用いて表せ．
(3) b を a と c を用いた式で表せ．この式が a についての恒等式となるように b と c の値を求めよ．

(22 東京海洋大 生命・資源 3)

【答】
(1) 略
(2) $f(x) = -2x - a - 2$
(3) $b = -1,\ c = -1$

【解答】

$$f(x) = x^2 + ax + b + \int_c^x f(t)\,dt \qquad \cdots\cdots (*)$$

(1) $f(x)$ の次数を 0 とすると，$\displaystyle\int_c^x f(t)\,dt$ の次数は 1 であるから，$(*)$ の

左辺の次数は 0，右辺の次数は 2

となり，不合理である．

また，$f(x)$ の次数を 2 とすると，$\displaystyle\int_c^x f(t)\,dt$ の次数は 3 であるから，$(*)$ の

左辺の次数は 2，右辺の次数は 3

となり，不合理である．

よって，$f(x)$ の次数が 0 または 2 の場合には等式 $(*)$ が成り立たない．

$\cdots\cdots$ (証明終わり)

(2) $f(x)$ の次数が 2 以下であることと，(1) の結果をあわせると，$f(x)$ の次数は 1 であるから，定数 $p\ (\neq 0),\ q$ を用いて

$$f(x) = px + q$$

と表すことができる．このとき

$$\begin{aligned}\int_c^x f(t)\,dt &= \left[p\frac{t^2}{2} + qt\right]_c^x \\ &= \frac{p}{2}x^2 + qx - \frac{pc^2}{2} - qc\end{aligned}$$

であるから，$(*)$ は

$$\begin{aligned}px + q &= x^2 + ax + b + \left(\frac{p}{2}x^2 + qx - \frac{pc^2}{2} - qc\right) \\ &= \left(\frac{p}{2} + 1\right)x^2 + (a+q)x + b - \frac{pc^2}{2} - qc\end{aligned}$$

となり，これは x についての恒等式であるから

$$\begin{cases} \dfrac{p}{2} + 1 = 0 & \cdots\cdots ① \\ a + q = p & \cdots\cdots ② \\ b - \dfrac{pc^2}{2} - qc = q & \cdots\cdots ③ \end{cases}$$

①より $p=-2$ であり，②より $q=-a+p=-a-2$ である．よって

$$\boldsymbol{f(x)=-2x-a-2} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．

(3) ③より，b を a と c で表すと

$$\begin{aligned} b &= \frac{pc^2}{2}+qc+q \\ &= \frac{-2c^2}{2}-(a+2)c-(a+2) \\ &= -(c+1)a-c^2-2c-2 \end{aligned}$$

この式が a についての恒等式となる条件は

$$\begin{cases} c+1=0 \\ -c^2-2c-2=b \end{cases}$$

であり，求める b と c の値は

$$\boldsymbol{b=-1,\ c=-1} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．