次の問いに答えよ．

(1) a を実数とする．$y = ax$ のグラフと $y = x|x-2|$ のグラフの交点の個数が最大となる a の範囲を求めよ．

(2) $0 \leqq a \leqq 2$ とする．$S(a)$ を $y = ax$ のグラフと $y = x|x-2|$ のグラフで囲まれる図形の面積とする．$S(a)$ を a の式で表せ．

(3) (2) で求めた $S(a)$ を最小にする a の値を求めよ．

(22 千葉大 3)

【答】

(1) $0 < a < 2,\ 2 < a$

(2) $S(a) = -\dfrac{a^3}{6} + 3a^2 - 2a + \dfrac{4}{3}$

(3) $a = 6 - 4\sqrt{2}$

【解答】

$$y = ax \qquad \cdots\cdots ①$$

$$y = x|x-2| = \begin{cases} -x(x-2) & (x \leqq 2 \text{ のとき}) \\ x(x-2) & (x \geqq 2 \text{ のとき}) \end{cases} \qquad \cdots\cdots ②$$

(1) ①, ② のグラフは右図のようになる．

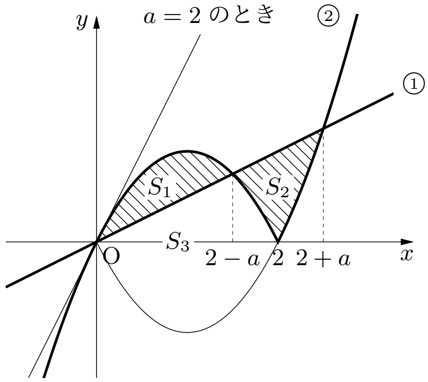
$y = -x(x-2)$ のとき $y' = -2x+2$ であり，② の $x=0$ における接線の傾きは $y'_{(x=0)} = 2$ であるから，① と ② のグラフの交点の個数は

a	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$
個数	1	2	3	2	3

であり，交点の個数が最大となる a の範囲は

$$\boldsymbol{0 < a < 2,\ 2 < a} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．



- ①,② を連立すると

$$ax = x|x-2|$$
$$x(|x-2| - a) = 0$$
$$\therefore \begin{cases} a < 0 \text{ のとき} & x = 0 \\ a = 0 \text{ のとき} & x = 0,\ 2 \\ a > 0 \text{ のとき} & x = 0,\ 2 \pm a \end{cases}$$

であり,【解答】の個数の表を得る．以下略．

(2) $0 \leqq a \leqq 2$ のとき，①, ② の交点の x 座標は

$$x = 0,\ 2-a,\ 2+a$$

であり，①, ② のグラフで囲まれる図形は上図の斜線部分となる．図のように各領域の面積

を S_1，S_2，S_3 とおくと，求める面積 $S(a)$ は

$$
\begin{aligned}
S(a) &= S_1 + S_2 \\
&= (S_1 + S_2 + S_3) - S_3 \\
&= \left\{\int_0^{2-a}\{-x(x-2)-ax\}\,dx + \int_0^{2+a}\{ax - x(x-2)\}\,dx\right\} \\
&\qquad - \left\{2\int_0^{2}\{-x(x-2)\}\,dx - \int_0^{2-a}\{-x(x-2)-ax\}\,dx\right\} \\
&= \int_0^{2-a}\{-x(x-2+a)\}\,dx + \int_0^{2+a}\{-x(x-2-a)\}\,dx \\
&\qquad - 2\int_0^{2}\{-x(x-2)\}\,dx + \int_0^{2-a}\{-x(x-2+a)\}\,dx \\
&= \frac{(2-a)^3}{6} + \frac{(2+a)^3}{6} - 2\cdot\frac{2^3}{6} + \frac{(2-a)^3}{6} \\
&= \frac{1}{6}\{2(2-a)^3 + (2+a)^3 - 16\} \\
&= \frac{1}{6}\{2(-a^3+6a^2-12a+8) + (a^3+6a^2+12a+8) - 16\} \\
&= \frac{1}{6}(-a^3+18a^2-12a+8) \\
&= \boldsymbol{-\frac{a^3}{6} + 3a^2 - 2a + \frac{4}{3}} \qquad \cdots\cdots(答)
\end{aligned}
$$

である．

- 素直に

$$
S(a) = \int_0^{2-a}\{-x(x-2)-ax\}\,dx + \int_{2-a}^{2}\{ax + x(x-2)\}\,dx + \int_2^{2+a}\{ax - x(x-2)\}\,dx
$$

を計算してもいが,【解答】では $\dfrac{1}{6}$ 公式が使えるように工夫した．

(3) 微分すると

$$
\begin{aligned}
S'(a) &= -\frac{a^2}{2} + 6a - 2 \\
&= -\frac{1}{2}(a^2 - 12a + 4)
\end{aligned}
$$

であり，$S'(a)$ の符号は $a = 6 \pm 4\sqrt{2}$ で変わる．$0 \leqq a \leqq 2$ における $S(a)$ の増減は下表となる．

a	0	$\cdots$	$6-4\sqrt{2}$	$\cdots$	2
$S'(a)$		$-$	0	$+$	
$S(a)$		$\searrow$		$\nearrow$	

よって，$S(a)$ を最小にする a の値は

$$
\boldsymbol{a = 6 - 4\sqrt{2}} \qquad \cdots\cdots(答)
$$

である．