曲線 $C_1 : y = x^2$，$C_2 : y = \dfrac{1}{2}x^2 - 4x + 17$ を考える．

(1) 曲線 C_1 および C_2 に接し，傾きが正である直線を ℓ とする．ℓ の方程式を求めよ．

(2) $x > 0$ において，曲線 C_1，C_2，および (1) で求めた直線 ℓ で囲まれた図形の面積を求めよ．

(22 富山大 教育・経済 3)

【答】

(1) $\ell : y = 2x - 1$

(2) $125 - \dfrac{250}{3}\sqrt{2}$

【解答】

$$C_1 : y = x^2,\ C_2 : y = \frac{1}{2}x^2 - 4x + 17$$

(1) $f(x) = x^2,\ g(x) = \dfrac{1}{2}x^2 - 4x + 17$ とおく．

$$f'(x) = 2x, \quad g'(x) = x - 4$$

C_1 上の点 $(s,\ f(s))$ における接線の方程式は

$$y = 2s(x - s) + s^2$$

$$\therefore \quad y = 2sx - s^2 \qquad \cdots\cdots ①$$

C_2 上の点 $(t,\ g(t))$ における接線の方程式は

$$y = (t - 4)(x - t) + \frac{1}{2}t^2 - 4t + 17$$

$$\therefore \quad y = (t - 4)x - \frac{1}{2}t^2 + 17 \qquad \cdots\cdots ②$$

ℓ は①，②が一致したものであるから，①，②の係数を比較して

$$\begin{cases} 2s = t - 4 \\ -s^2 = -\dfrac{1}{2}t^2 + 17 \end{cases} \iff \begin{cases} t = 2s + 4 \\ s^2 = \dfrac{1}{2}(2s + 4)^2 - 17 \end{cases}$$

第 2 式を解くと

$$s^2 = 2(s + 2)^2 - 17$$

$$s^2 + 8s - 9 = 0$$

$$\therefore \quad (s + 9)(s - 1) = 0$$

ℓ の傾きは正より

$$2s > 0 \qquad \therefore \quad s > 0$$

であるから

$$s = 1 \qquad \therefore \quad t = 6$$

である．よって，ℓ の方程式は

$$\boldsymbol{\ell : y = 2x - 1} \qquad \cdots\cdots(答)$$

である．

- ① が C_2 の接線である条件は

$$\frac{1}{2}x^2-4x+17=2sx-s^2$$
$$\therefore\quad \frac{1}{2}x^2-2(s+2)x+s^2+17=0$$

が重解をもつことである．判別式を D とおくと

$$\begin{aligned}D&=(s+2)^2-\frac{1}{2}(s^2+17)\\&=\frac{1}{2}s^2+4s-\frac{9}{2}\\&=\frac{1}{2}(s+9)(s-1)\end{aligned}$$

であり，求める条件は $D=0$ である．これ以後は【解答】と同じ．

- ℓ の方程式を $y=mx+n$ (m, n は定数で $m>0$) とおき，

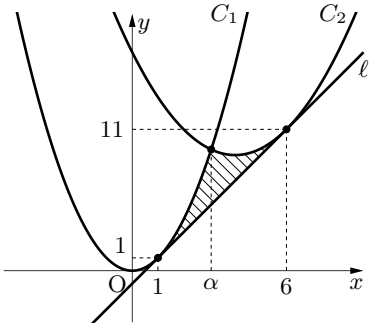
$$x^2=mx+n,$$
$$\frac{1}{2}s^2+4s-\frac{9}{2}=mx+n$$

のどちらも重解をもつことから m, n の値を求めることもできる

(2) (1) より ℓ と C_1, C_2 の接点の x 座標はそれぞれ

$$x=1,\quad x=6$$

である．



C_1, C_2 の交点の x 座標は

$$x^2=\frac{1}{2}x^2-4x+17$$
$$x^2+8x-34=0$$
$$\therefore\quad x=-4\pm5\sqrt{2}$$

$\alpha=-4+5\sqrt{2}$ とおくと，求める面積 S は

$$\begin{aligned}S&=\int_1^{\alpha}\{f(x)-(2x-1)\}\,dx+\int_{\alpha}^{6}\{g(x)-(2x-1)\}\,dx\\&=\int_1^{\alpha}(x-1)^2\,dx+\int_{\alpha}^{6}\frac{1}{2}(x-6)^2\,dx\\&=\left[\frac{1}{3}(x-1)^3\right]_1^{\alpha}+\frac{1}{2}\left[\frac{1}{3}(x-6)^3\right]_{\alpha}^{6}\\&=\frac{1}{3}(\alpha-1)^3-\frac{1}{6}(\alpha-6)^3\\&=\frac{5^3}{3}(\sqrt{2}-1)^3+\frac{5^3\cdot2\sqrt{2}}{6}(\sqrt{2}-1)^3\quad(\because\ \alpha=-4+5\sqrt{2})\\&=\frac{5^3}{3}(\sqrt{2}-1)^3(1+\sqrt{2})\\&=\frac{5^3}{3}(\sqrt{2}-1)^2\\&=\boldsymbol{\frac{375-250\sqrt{2}}{3}}\end{aligned}$$

……(答)

である．