座標平面上の放物線 $y=-x^2+(a-4)x+2a-8$ を C とし，点 $(-2,\ 0)$ を通る直線 L_1 と放物線 C が点 P で接するとする．ただし，点 P の x 座標は 0 以上であり，$a \neq 4$ とする．このとき，次の問に答えよ．

(1) 点 P の座標を a を用いて表せ．
(2) 直線 L_1 の方程式を a を用いて表せ．
(3) 点 P を通り，直線 L_1 に垂直な直線 L_2 の方程式を a を用いて表せ．
(4) 放物線 C と直線 L_2 の交点で，点 P と異なる点を Q とするとき，点 Q の座標を a を用いて表せ．
(5) $a>4$ のとき，放物線 C と直線 L_2 に囲まれた図形の面積を a を用いて表せ．

(22 山形大 農・人文 2)

【答】

(1) $\mathrm{P}(0,\ 2a-8)$
(2) $L_1 : y=(a-4)x+2a-8$
(3) $L_2 : y=-\dfrac{x}{a-4}+2a-8$
(4) $\mathrm{Q}\left(a-4+\dfrac{1}{a-4},\ -\dfrac{1}{(a-4)^2}+2a-9\right)$
(5) $\dfrac{1}{6}\left(a-4+\dfrac{1}{a-4}\right)^3$

【解答】

$$C : y=-x^2+(a-4)x+2a-8$$

(1) $$y'=-2x+a-4$$

C 上の点 $\mathrm{P}(t,\ -t^2+(a-4)t+2a-8)$ $(t \geqq 0)$ における接線 L_1 の方程式は

$$y=(-2t+a-4)(x-t)-t^2+(a-4)t+2a-8$$

$$\therefore\quad y=(-2t+a-4)x+t^2+2a-8 \qquad \cdots\cdots ①$$

である．L_1 は点 $(-2,\ 0)$ を通るから

$$0=-2(-2t+a-4)+t^2+2a-8$$

$$t^2+4t=0$$

$t \geqq 0$ より

$$t=0$$

よって，点 P の座標は

$$\boldsymbol{\mathrm{P}(0,\ 2a-8)} \qquad \cdots\cdots(答)$$

である．

(2) ① に $t=0$ を代入して

$$\boldsymbol{L_1 : y=(a-4)x+2a-8} \qquad \cdots\cdots(答)$$

である．

(3) 点 P を通り，直線 L_1 に垂直な直線 L_2 の方程式は，$a \neq 4$ より

$$\boldsymbol{L_2 : y=-\frac{x}{a-4}+2a-8} \qquad \cdots\cdots(答)$$

である．

(4) 放物線 C と直線 L_2 の交点では

$$-x^2+(a-4)x+2a-8=-\frac{x}{a-4}+2a-8$$

$$x^2-\left(a-4+\frac{1}{a-4}\right)x=0$$

が成り立つ．Q は P と異なるから，Q の x 座標は $x \neq 0$ であり

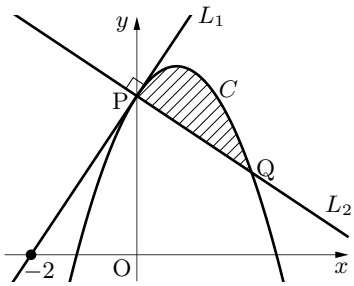
$$x=a-4+\frac{1}{a-4}\ (\text{これは } x \neq 0 \text{ を満たす})$$

よって，Q の座標は

$$\mathbf{Q}\left(\boldsymbol{a-4+\frac{1}{a-4}},\ \boldsymbol{-\frac{1}{(a-4)^2}+2a-9}\right) \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．

(5) $a>4$ のとき，$a-4+\dfrac{1}{a-4}>0$ であり，放物線 C と直線 L_2 に囲まれた図形は右図の斜線部分である．求める面積は



$$\int_0^{a-4+\frac{1}{a-4}}\left\{\left(-x^2+(a-4)x+2a-8\right)-\left(-\frac{x}{a-4}+2a-8\right)\right\}dx$$

$$=\int_0^{a-4+\frac{1}{a-4}}\left\{-x\left(x-a+4-\frac{1}{a-4}\right)\right\}dx$$

$$=\boldsymbol{\frac{1}{6}\left(a-4+\frac{1}{a-4}\right)^3} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．