関数 $f(x)=x^2-|x^2-2x|$ について以下の問いに答えよ．

(1) $y=f(x)$ のグラフの概形を描け．

(2) 点 $(0,\ -1)$ を通る直線 $y=mx-1$ が $y=f(x)$ と 3 個の共有点をもつための傾き m の範囲を求めよ．

(3) $y=f(x)$ のグラフと直線 $y=2x$ で囲まれる部分の面積を求めよ．

(22 東北学院大 工 A 3)

【答】

(1) 略

(2) $2\sqrt{2}-2<m<2,\ 2<m<\dfrac{5}{2}$

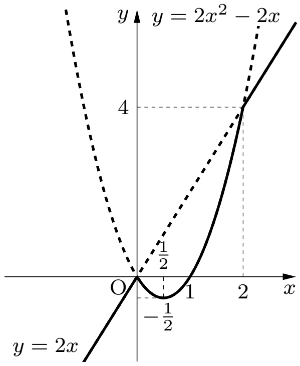
(3) $\dfrac{8}{3}$

【解答】

$$f(x)=x^2-|x^2-2x|$$

(1) 場合分けし，絶対値をはずすと

$$\begin{aligned}f(x)&=x^2-|x(x-2)|\\&=\begin{cases}x^2-(x^2-2x) & (x(x-2)\geqq 0\ のとき)\\ x^2+(x^2-2x) & (x(x-2)\leqq 0\ のとき)\end{cases}\\&=\begin{cases}2x & (x\leqq 0,\ 2\leqq x\ のとき)\\ 2x^2-2x & (0\leqq x\leqq 2\ のとき)\end{cases}\\&=\begin{cases}2x & (x\leqq 0,\ 2\leqq x\ のとき)\\ 2\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2-\dfrac{1}{2} & (0\leqq x\leqq 2\ のとき)\end{cases}\end{aligned}$$



よって，$y=f(x)$ のグラフの概形は右図の実線部分となる．

(2) 直線 $y=mx-1$ と放物線 $y=2x^2-2x$ が接する条件は

$$2x^2-2x=mx-1$$

すなわち

$$2x^2-(m+2)x+1=0$$

が重解をもつことであり，(判別式) $=0$ である．

$$(m+2)^2-8=0$$

$$\therefore\quad m=-2\pm 2\sqrt{2}$$

(1) の図より，接点の x 座標が $0<x<2$ にあるのは

$$m=2\sqrt{2}-2$$

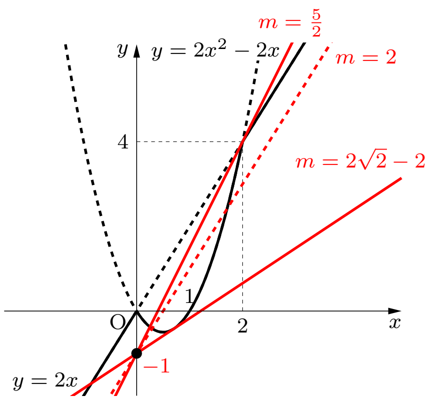
のときである．

また，直線 $y=mx-1$ が点 $(2,\ 4)$ を通るのは，$4=2m-1$ より

$$m=\frac{5}{2}$$

のときであり，直線 $y=mx-1$ が直線 $y=2x$ と平行になるのは，

$$m=2$$



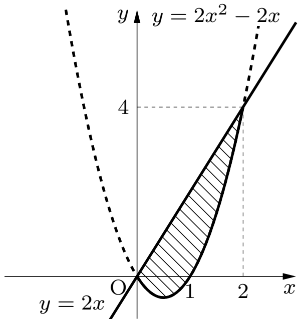
のときである．

よって，$y = mx - 1$ が $y = f(x)$ と 3 個の共有点をもつための m の範囲は

$$\boldsymbol{2\sqrt{2} - 2 < m < 2,\ 2 < m < \frac{5}{2}} \quad \cdots\cdots(答)$$

である．

(3) 求める面積は，右図の斜線部分の面積であり



$$\begin{aligned} &\int_0^2 \{2x - (2x^2 - 2x)\}\,dx \\ &= -2\int_0^2 x(x-2)\,dx \\ &= 2 \cdot \frac{(2-0)^3}{6} \\ &= \boldsymbol{\frac{8}{3}} \end{aligned} \quad \cdots\cdots(答)$$

である．