座標平面上の曲線 $y = x^3 - 4x^2 - 4$ を C とする．曲線 C 上の点 $\mathrm{A}(4,\ -4)$ を通り，傾きが k の直線を ℓ とする．曲線 C と直線 ℓ が点 A の他に相異なる 2 つの共有点 P，Q をもつとき，以下の問いに答えよ．

(1) k のとりうる値の範囲を求めよ．

(2) 点 P，Q における曲線 C の接線をそれぞれ ℓ_{P}，ℓ_{Q} とする．k が (1) の範囲にあるとき，接線 ℓ_{P} と ℓ_{Q} の交点が描く曲線の方程式を求めよ．

(3) (2) の曲線と x 軸によって囲まれる部分の面積を求めよ．

(22 熊本大 教育・医 (看護) 4)

【答】

(1) $0 < k < 16,\ 16 < k$

(2) $\begin{cases} y = -12x^2 - 16x - 4 \\ x < -4,\ -4 < x < 0 \end{cases}$

(3) $\dfrac{16}{27}$

【解答】

$$C : y = x^3 - 4x^2 - 4$$

(1) ℓ は点 $\mathrm{A}(4,\ -4)$ を通り，傾きが k の直線であるから，方程式は

$$y = k(x-4) - 4$$

である．曲線 C と直線 ℓ の交点では

$$x^3 - 4x^2 - 4 = k(x-4) - 4$$
$$x^2(x-4) = k(x-4)$$
$$\therefore\quad (x^2 - k)(x-4) = 0$$

が成り立つ．A 以外の異なる共有点 P，Q をもつ条件は，$x^2 - k = 0$ が $x = 4$ 以外の異なる 2 つの実数解をもつことであり

$$\begin{cases} 4^2 - k \neq 0 \\ k > 0 \end{cases}$$

である．よって，k のとりうる値の範囲は

$$\boldsymbol{0 < k < 16,\ 16 < k} \quad \cdots\cdots ①$$ ……(答)

である．

(2) (1) より，A 以外の共有点 P，Q の x 座標は $x = \pm\sqrt{k}$ である．P の x 座標を $x = -\sqrt{k}$，Q の x 座標を $x = \sqrt{k}$ とする．

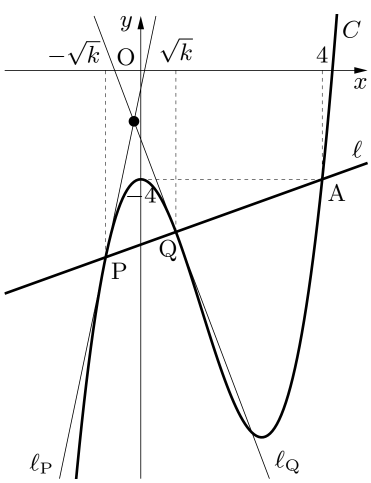
$$y' = 3x^2 - 8x$$

であり，C 上の点 $\mathrm{P}\left(-\sqrt{k},\ -k\sqrt{k} - 4k - 4\right)$ における C の接線の方程式は

$$y = (3k + 8\sqrt{k})(x + \sqrt{k}) - k\sqrt{k} - 4k - 4$$
$$\therefore\quad y = (3k + 8\sqrt{k})x + 2k\sqrt{k} + 4k - 4 \quad \cdots\cdots ②$$

である．また，C 上の点 $\mathrm{Q}\left(\sqrt{k},\ k\sqrt{k} - 4k - 4\right)$ における C の接線の方程式は

$$y = (3k - 8\sqrt{k})(x - \sqrt{k}) + k\sqrt{k} - 4k - 4$$
$$\therefore\quad y = (3k - 8\sqrt{k})x - 2k\sqrt{k} + 4k - 4 \quad \cdots\cdots ③$$



である．接線 ℓ_{P} と ℓ_{Q} の交点が描く曲線は，「① かつ ② かつ ③」を満たす k が存在するような点 $(x,\ y)$ 全体の集合である．

②, ③ の辺々を引くと

$$0 = 16\sqrt{k}x + 4k\sqrt{k} \qquad \therefore \quad k = -4x \quad (\because\ k > 0)$$

であり，このとき ② は

$$\begin{aligned} y &= (-12x + 8\sqrt{-4x})x - 8x\sqrt{-4x} - 16x - 4 \\ &= -12x^2 - 16x - 4 \end{aligned}$$

である．したがって

$$\text{「① かつ ② かつ ③」} \iff \begin{cases} k = -4x \\ y = -12x^2 - 16x - 4 \\ 0 < -4x < 16,\ 16 < -4x \end{cases}$$

であり，求める曲線の方程式は

$$\begin{cases} \boldsymbol{y = -12x^2 - 16x - 4} \\ \boldsymbol{x < -4,\ \ -4 < x < 0} \end{cases}$$ ……(答)

である．

(3) (2) の曲線は

$$\begin{cases} y = -4(x+1)(3x+1) \\ x < -4,\ \ -4 < x < 0 \end{cases}$$

であり，(2) の曲線と x 軸とで囲まれた部分の面積 S は

$$\begin{aligned} S &= -12\int_{-1}^{-\frac{1}{3}} (x+1)\left(x + \frac{1}{3}\right) dx \\ &= 12 \cdot \frac{\left\{-\frac{1}{3} - (-1)\right\}^3}{6} \\ &= 2 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^3 \\ &= \boldsymbol{\frac{16}{27}} \end{aligned}$$ ……(答)

である．