座標平面上に曲線 $C : y = x^2 + 4$ と点 A$(2,\ -1)$ がある．このとき，次の問いに答えなさい．

(1) 点 A から曲線 C に引いた接線の方程式を 2 個求めなさい．
(2) 曲線 C と (1) で求めた 2 個の接線が囲む図形の面積 S_1 を求めなさい．
(3) 曲線 C 上の x 座標が -3 である点を B とする．点 B を通る直線 l は (1) で求めた 2 個の接線のうち傾きの絶対値が小さいものと平行であるとする．このとき，曲線 C と直線 l の囲む図形の面積 S_2 を求めなさい．

(22 福島大 食農 4)

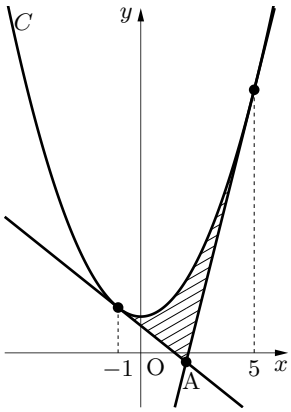
【答】

(1) $y = -2x + 3$，$y = 10x - 21$
(2) $S_1 = 18$
(3) $S_2 = \dfrac{32}{3}$

【解答】

$$C : y = x^2 + 4$$

(1) $$y' = 2x$$



C 上の点 $(t,\ t^2 + 4)$ における接線の方程式は

$$y = 2t(x - t) + (t^2 + 4)$$
$$\therefore\quad y = 2tx - t^2 + 4$$

これが A$(2,\ -1)$ を通るので

$$-1 = 4t - t^2 + 4$$
$$t^2 - 4t - 5 = 0$$
$$(t + 1)(t - 5) = 0 \qquad \therefore\quad t = -1,\ 5$$

よって，求める接線の方程式は

$$\boldsymbol{y = -2x + 3,\quad y = 10x - 21} \quad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．

(2) S_1 は右図の斜線部分の面積であり

$$\begin{aligned} S_1 &= \int_{-1}^{2} \{(x^2 + 4) - (-2x + 3)\}\,dx + \int_{2}^{5} \{(x^2 + 4) - (10x - 21)\}\,dx \\ &= \int_{-1}^{2} (x + 1)^2\,dx + \int_{2}^{5} (x - 5)^2\,dx \\ &= \left[\frac{(x + 1)^3}{3}\right]_{-1}^{2} + \left[\frac{(x - 5)^3}{3}\right]_{2}^{5} \\ &= 9 + 9 \\ &= \boldsymbol{18} \end{aligned} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．

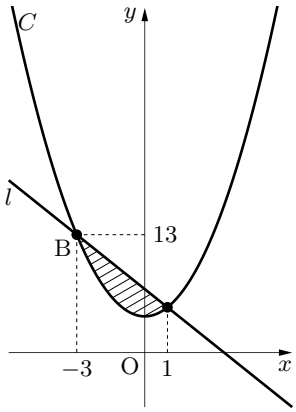
(3) l は B$(-3,\ 13)$ を通り傾きが -2 の直線なので，l の方程式は

$$y = -2(x+3) + 13$$
$$\therefore\quad l : y = -2x + 7$$

C と l の共有点の x 座標は

$$x^2 + 4 = -2x + 7$$
$$x^2 + 2x - 3 = 0$$
$$(x+3)(x-1) = 0$$
$$\therefore\quad x = -3,\ 1$$

である．S_2 は右図の斜線部分の面積であり



$$\begin{aligned} S_2 &= \int_{-3}^{1} \{(-2x+7) - (x^2+4)\}\,dx \\ &= -\int_{-3}^{1} (x+3)(x-1)\,dx \\ &= \frac{\{1-(-3)\}^3}{6} \\ &= \boldsymbol{\frac{32}{3}} \end{aligned}$$

……(答)

である．