関数 $f(x)=x^3-2x^2+x-1$ について，次の各問に答えよ．

(1) 関数 $y=f(x)$ について，極値を求めよ．また，そのグラフをかけ．
(2) 曲線 $C: y=f(x)$ について，傾きが 1 である接線の方程式をすべて求めよ．
(3) (2) で求めた接線のうち，y 軸との交点の y 座標が最大のものを l とする．C と l とで囲まれた部分の面積を求めよ．

(22 茨城大 教育 2)

【答】

(1) 極大値 $f\left(\frac{1}{3}\right)=-\frac{23}{27}$，極大値 $f(1)=-1$，グラフは略
(2) $y=x-1$，$y=x-\frac{59}{27}$
(3) $\frac{4}{3}$

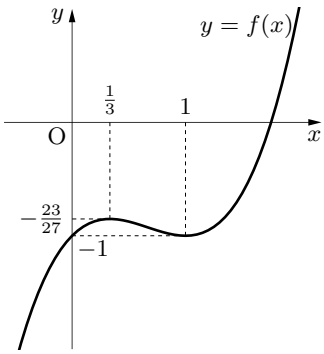
【解答】

$$f(x)=x^3-2x^2+x-1$$

(1) $f'(x)=3x^2-4x+1$

$=(3x-1)(x-1)$

x	$\cdots$	$\frac{1}{3}$	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$



$y=f(x)$ の極値は

極大値 $f\left(\frac{1}{3}\right)=\left(\frac{1}{3}\right)^3-2\left(\frac{1}{3}\right)^2+\frac{1}{3}-1$

$=\boldsymbol{-\frac{23}{27}}$ ……(答)

極小値 $f(1)=\boldsymbol{-1}$ ……(答)

であり，グラフは右図となる．

(2) 接線の傾きが 1 となるのは，$f'(x)=1$ を満たすときであり

$$3x^2-4x+1=1$$
$$x(3x-4)=0$$
$$\therefore\quad x=0,\ \frac{4}{3}$$

のときである．

$x=0$ のとき，$f(0)=-1$ より，接線の方程式は

$\boldsymbol{y=x-1}$ ……(答)

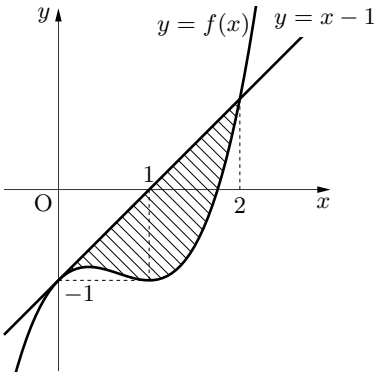
$x=\frac{4}{3}$ のとき，$f\left(\frac{4}{3}\right)=\left(\frac{4}{3}\right)^3-2\left(\frac{4}{3}\right)^2+\frac{4}{3}-1=-\frac{23}{27}$ より，接線の方程式は

$$y=\left(x-\frac{4}{3}\right)-\frac{23}{27}$$

$\therefore\quad \boldsymbol{y=x-\frac{59}{27}}$ ……(答)

である．

(3) (2) の接線のうち，y 軸との交点の y 座標が最大な l の方程式は $y = x - 1$ である．$y = f(x)$ と l との交点の x 座標は



$$x^3 - 2x^2 + x - 1 = x - 1$$
$$x^2(x-2) = 0$$
$$\therefore \quad x = 0 \text{ (重解)},\ 2$$

である．よって，求める面積は

$$\int_0^2 \{(x-1) - (x^3 - 2x^2 + x - 1)\}\,dx$$
$$= \int_0^2 (-x^3 + 2x^2)\,dx$$
$$= \left[-\frac{x^4}{4} + 2 \cdot \frac{x^3}{3} \right]_0^2$$
$$= -4 + \frac{16}{3}$$
$$= \boldsymbol{\frac{4}{3}}$$

……(答)

である．