$a,\ b$ を定数とし，$f(x)=x^3+ax+b$ とする．

曲線 $y=f(x)$ が点 $(-1,\ f(-1))$ で直線 $y=-2x-1$ に接しているとき，次の問いに答えよ．

(1) $a,\ b$ の値を求めよ．

(2) 多項式 $g(x)$ と正の定数 c に対して，等式

$$g(x)=\int_c^x\{f(t)+g(t)\}dt$$

が成立するとき，$g(x)$ および c の値を求めよ．

(22 岩手大 教育・農 4)

【答】

(1) $a=-5,\ b=-3$

(2) $g(x)=-x^3-3x^2-x+2$，$c=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$

【解答】

$$f(x)=x^3+ax+b$$

(1) $$f'(x)=3x^2+a$$

曲線 $y=f(x)$ 上の点 $(-1,\ -1-a+b)$ における接線の方程式は

$$y=(3+a)(x+1)-1-a+b$$
$$\therefore\quad y=(3+a)x+b+2$$

である．これが $y=-2x-1$ に一致するから

$$\begin{cases}3+a=-2\\ b+2=-1\end{cases}\qquad \therefore\quad \boldsymbol{a=-5,\ b=-3}\qquad \cdots\cdots(答)$$

である．

- $y=f(x)$ が $x=-1$ で $y=-2x-1$ と接する条件は方程式 $x^3+ax+b=-2x-1$ が $x=-1$ を重解にもつことであるから

  $$x^3+(a+2)x+b+1=(x+1)^2(x-\alpha)$$

  であり，係数を比較すると

  $$\begin{cases}-1-1+\alpha=0\\ (-1)^2+(-1)\alpha+\alpha(-1)=a+2\\ (-1)^2\alpha=-(b+1)\end{cases}\qquad \therefore\quad \alpha=2,\ a=-5,\ b=-3$$

  である．

(2) (1) から

$$g(x)=\int_c^x\left\{t^3-5t-3+g(t)\right\}dt\qquad \cdots\cdots ①$$

① の辺々を微分すると

$$g'(x)=x^3-5x-3+g(x)$$
$$\therefore\quad g(x)-g'(x)=-x^3+5x+3\qquad \cdots\cdots ②$$

である．② より多項式 $g(x)$ の最高次の項は $-x^3$ であり，定数 $p,\ q,\ r$ を用いて

$$g(x) = -x^3 + px^2 + qx + r$$

とおくことができる．このとき，② は

$$(-x^3 + px^2 + qx + r) - (-3x^2 + 2px + q) = -x^3 + 5x + 3$$

$$\therefore\quad -x^3 + (p+3)x^2 + (q-2p)x + r - q = -x^3 + 5x + 3$$

両辺の係数を比較して

$$\begin{cases} p + 3 = 0 \\ q - 2p = 5 \\ r - q = 3 \end{cases} \qquad \therefore\quad p = -3,\ q = -1,\ r = 2$$

$$\therefore\quad \boldsymbol{g(x) = -x^3 - 3x^2 - x + 2}$$ ……（答）

である．また，① において，$x = c$ とすると $g(c) = 0$ であり

$$c^3 + 3c^2 + c - 2 = 0$$

$$(c+2)(c^2 + c - 1) = 0$$

c は正の定数だから

$$\boldsymbol{c = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}}$$ ……（答）

である．