$n$ を 3 以上の自然数とする．半径 $r_n$ の円 $O_n$ に内接する正 $n$ 角形の周の長さが 2 であるとする．この正 $n$ 角形の面積を $a_n$ とし，円 $O_n$ に外接する正 $n$ 角形の面積を $b_n$ とする．ただし，正 $n$ 角形が円に内接するとは，正 $n$ 角形のすべての頂点がその円周上にあることをいう．また，正 $n$ 角形が円に外接するとは，正 $n$ 角形のすべての辺がその円に接することをいう．以下の各問に答えよ．

(1) $r_n$ を求めよ．
(2) $a_n$ を求めよ．
(3) $b_n$ を求めよ．
(4) $a_8$ の値を $p+q\sqrt{2}$ の形で表すとき，$p$ と $q$ を求めよ．ただし，$p$ と $q$ は有理数とする．
(5) $k$ を整数とする．数列 $\{n^k(b_n-a_n)\}$ が 0 でない値に収束するように，$k$ の値を定めよ．さらに，そのときの極限値 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} n^k(b_n-a_n)$ を求めよ．

(22 茨城大 理 2)

---

【答】

(1) $r_n=\dfrac{1}{n\sin\dfrac{\pi}{n}}$

(2) $a_n=\dfrac{1}{n\tan\dfrac{\pi}{n}}$

(3) $b_n=\dfrac{2}{n\sin\dfrac{2\pi}{n}}$

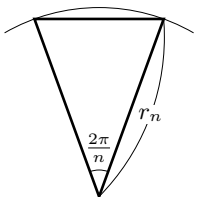
(4) $p=\dfrac{1}{8}$, $q=\dfrac{1}{8}$

(5) $k=2$, $\displaystyle\lim_{n\to\infty} n^k(b_n-a_n)=\pi$

---

【解答】

(1) 円の中心と内接する正 $n$ 角形の隣り合う 2 つの頂点を結んでできる三角形は，等辺の長さが $r_n$ の二等辺三角形であり，頂角の大きさは $\dfrac{2\pi}{n}$ である．




内接する正 $n$ 角形の一辺の長さは $2r_n\sin\dfrac{\pi}{n}$ であり，周の長さが 2 であることから，$r_n$ は

$$n\times 2r_n\sin\frac{\pi}{n}=2$$

$$\therefore\quad \boldsymbol{r_n=\frac{1}{n\sin\frac{\pi}{n}}} \qquad \cdots\cdots(答)$$

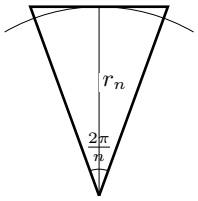
である．

(2) 円に内接する正 $n$ 角形の面積 $a_n$ は，(1) の二等辺三角形の面積の $n$ 倍であるから

$$\begin{aligned} a_n &= n\times\frac{1}{2}{r_n}^2\sin\frac{2\pi}{n} \\ &= n\times\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{n^2\sin^2\frac{\pi}{n}}\cdot 2\sin\frac{\pi}{n}\cos\frac{\pi}{n} \quad (\because\ (1),\ 2\text{ 倍角の公式}) \\ &= \boldsymbol{\frac{1}{n\tan\frac{\pi}{n}}} \quad (\because\ n\geqq 3 \text{ より } \cos\frac{\pi}{2}\neq 0) \qquad \cdots\cdots(答) \end{aligned}$$

である．

(3) 円の中心と外接する正 $n$ 角形の隣り合う 2 つの頂点を結んでできる三角形は，高さが $r_n$ の二等辺三角形であり，頂角の大きさは $\dfrac{2\pi}{n}$ である．




外接する正 $n$ 角形の一辺の長さは $2r_n \tan\dfrac{\pi}{n}$ であるから，外接する正 $n$ 角形の面積 $b_n$ は

$$\begin{aligned} b_n &= n \times \frac{1}{2}\left(2r_n \tan\frac{\pi}{n}\right)\cdot r_n \\ &= n \times \frac{1}{n^2\sin^2\dfrac{\pi}{n}}\cdot \sin\frac{\pi}{n}\cos\frac{\pi}{n} \quad (\because\ (1)) \\ &= \boldsymbol{\frac{2}{n\sin\dfrac{2\pi}{n}}} \end{aligned}$$

……(答)

である．

(4) (2) の結果より

$$a_8 = \frac{1}{8\tan\dfrac{\pi}{8}}$$

である．$\tan^2\theta = \dfrac{1-\cos 2\theta}{1+\cos 2\theta}$ $(\because$ 半角の公式$)$ を用いると

$$a_8 = \frac{1}{8}\sqrt{\frac{1+\cos\dfrac{\pi}{4}}{1-\cos\dfrac{\pi}{4}}} = \frac{1}{8}\sqrt{\frac{1+\dfrac{1}{\sqrt{2}}}{1-\dfrac{1}{\sqrt{2}}}} = \frac{1}{8}\sqrt{\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}} = \frac{\sqrt{2}+1}{8}$$

よって

$$\boldsymbol{p = q = \frac{1}{8}}$$

……(答)

である．

(5) (2)，(3) より

$$\begin{aligned} n^k(b_n - a_n) &= n^k\left(\frac{1}{n\sin\dfrac{\pi}{n}\cos\dfrac{\pi}{n}} - \frac{\cos\dfrac{\pi}{n}}{n\sin\dfrac{\pi}{n}}\right) \\ &= \frac{n^{k-1}}{\sin\dfrac{\pi}{n}}\left(\frac{1}{\cos\dfrac{\pi}{n}} - \cos\frac{\pi}{n}\right) \\ &= \frac{n^{k-1}\sin^2\dfrac{\pi}{n}}{\sin\dfrac{\pi}{n}\cos\dfrac{\pi}{n}} \\ &= n^{k-2}\cdot\frac{\sin\dfrac{\pi}{n}}{\dfrac{\pi}{n}}\cdot\frac{\pi}{\cos\dfrac{\pi}{n}} \end{aligned}$$

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{\sin\dfrac{\pi}{n}}{\dfrac{\pi}{n}} = 1$，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\cos\frac{\pi}{n} = 1$，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} n^{k-2} = \begin{cases}\infty & (k>2\text{ のとき})\\ 1 & (k=2\text{ のとき})\\ 0 & (k<2\text{ のとき})\end{cases}$ であるから，数列 $\{n^k(b_n - a_n)\}$ が 0 でない値に収束する条件は

$$\boldsymbol{k = 2}$$

……(答)

であり，このとき

$$\lim_{n\to\infty} n^2(b_n - a_n) = 1\cdot 1\cdot\frac{\pi}{1} = \boldsymbol{\pi}$$

……(答)

である．