無限級数 $\dfrac{1}{2!}+\dfrac{2}{3!}+\dfrac{3}{4!}+\dfrac{4}{5!}+\dfrac{5}{6!}+\dfrac{6}{7!}+\cdots+\dfrac{n}{(n+1)!}+\cdots$ の値を求めなさい．なお，無限級数 $1+\dfrac{1}{1!}+\dfrac{1}{2!}+\dfrac{1}{3!}+\dfrac{1}{4!}+\dfrac{1}{5!}+\dfrac{1}{6!}+\cdots+\dfrac{1}{n!}+\cdots$ は自然対数の底 e に収束することを用いてよい．

(22 公立千歳科技大 中期 理工 1(7))

【答】 1

【解答】

無限級数 $\dfrac{1}{2!}+\dfrac{2}{3!}+\dfrac{3}{4!}+\dfrac{4}{5!}+\dfrac{5}{6!}+\dfrac{6}{7!}+\cdots+\dfrac{n}{(n+1)!}+\cdots$ の第 n 部分和を S_n とおくと

$$\begin{aligned}S_n &= \sum_{k=1}^{n}\frac{k}{(k+1)!}=\sum_{k=1}^{n}\frac{(k+1)-1}{(k+1)!}=\sum_{k=1}^{n}\left\{\frac{1}{k!}-\frac{1}{(k+1)!}\right\} \qquad \cdots\cdots ① \\ &= 1-\frac{1}{(n+1)!}\end{aligned}$$

である．よって

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2!}+\frac{2}{3!}+\frac{3}{4!}+\frac{4}{5!}+\frac{5}{6!}+\frac{6}{7!}+\cdots+\frac{n}{(n+1)!}+\cdots \\ &= \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}S_n \\ &= \mathbf{1} \qquad \cdots\cdots(答)\end{aligned}$$

である．

- ヒントの

  $$1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+\frac{1}{5!}+\frac{1}{6!}+\cdots+\frac{1}{n!}+\cdots=e$$

  すなわち

  $$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}=e$$

  の利用を考える．① より

  $$\begin{aligned}S_n &= \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k!}-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(k+1)!} \\ &= \left(\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}-1\right)-\left\{\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(k+1)!}-1-\frac{1}{1!}+\frac{1}{(n+1)!}\right\} \\ &\underset{(n\to\infty)}{\longrightarrow} (e-1)-(e-1-1+0) \\ &= 1\end{aligned}$$

  である．

  よって

  $$\frac{1}{2!}+\frac{2}{3!}+\frac{3}{4!}+\frac{4}{5!}+\frac{5}{6!}+\frac{6}{7!}+\cdots+\frac{n}{(n+1)!}+\cdots=1$$

  である．