k を自然数として，

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2k}}{(1+4x^{2k})^{n-1}}$$

とおく．このとき，$\lim_{x\to 0}f(x)=$ $\boxed{\text{カ}}$ となる．

(22 明治大 理工・総合数理・政治経済 1(3))

【答】

カ
$\frac{1}{4}$

【解答】

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2k}}{(1+4x^{2k})^{n-1}}$$

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2k}}{(1+4x^{2k})^{n-1}}$ は，初項 x^{2k}，公比 $\frac{1}{1+4x^{2k}}$ の無限等比級数であり，$\lim_{x\to 0}f(x)$ を考えるとき $x\neq 0$ であるから，$0<\frac{1}{1+4x^{2k}}<1$ である．

$$f(x)=\frac{x^{2k}}{1-\frac{1}{1+4x^{2k}}}=\frac{x^{2k}(1+4x^{2k})}{4x^{2k}}=\frac{1}{4}+x^{2k}$$

よって

$$\lim_{x\to 0}f(x)=\boldsymbol{\frac{1}{4}} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．

- $f(0)=\sum_{n=1}^{\infty}0=0$ であり $\lim_{x\to 0}f(x)\neq f(0)$ であるから，$f(x)$ は $x=0$ では連続でない．