各項が正の整数である数列 $\{a_n\}$ が，条件

$$a_1 < a_2 < a_3 < \cdots < a_n < a_{n+1} < \cdots$$

を満たすとき，次の問いに答えよ．

(1) すべての正整数 n に対し，$a_n \geqq n$ が成り立つことを示せ．

(2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{a_n}\right)^2 < 2$ であることを示せ．

(22 鳥取大 医 4)

【答】

(1) 略

(2) 略

【解答】

$$a_1 < a_2 < a_3 < \cdots < a_n < a_{n+1} < \cdots \quad (\text{各項は正の整数})$$

(1) すべての正整数 n に対し

$$a_n \geqq n \quad \cdots\cdots (*)$$

が成り立つことを数学的帰納法を用いて示す．

(i) $n = 1$ のとき

a_1 は正の整数であるから　$a_1 \geqq 1$　であり，$n = 1$ のときは $(*)$ が成り立つ．

(ii) $n = k$ での成立を仮定する．

帰納法の仮定より $a_{k+1} > a_k \geqq k$ が成り立ち，a_{k+1} は正の整数なので $a_{k+1} \geqq k+1$ であり，$k = n+1$ のときも $(*)$ が成り立つ．

よって，すべての正整数 n に対して $(*)$ が成り立つ．

(2) (1) より

$${a_k}^2 > a_k a_{k-1} \geqq k(k-1)$$

であるから，$n \geqq 2$ のとき

$$\left(\frac{1}{a_k}\right)^2 < \frac{1}{k(k-1)} = \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}$$

が成り立つ．よって

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{a_k}\right)^2 &= \left(\frac{1}{a_1}\right)^2 + \left(\frac{1}{a_2}\right)^2 + \sum_{k=3}^{n}\left(\frac{1}{a_k}\right)^2 \\ &< \left(\frac{1}{1}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{3-1} - \frac{1}{n}\right) = \frac{7}{4} - \frac{1}{n} \\ &\underset{(n\to\infty)}{\longrightarrow} \frac{7}{4}\end{aligned}$$

であり

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{a_n}\right)^2 \leqq \frac{7}{4} < 2$$

が成り立つ．　　　　……(証明終わり)

- 和のとり方を $\displaystyle\sum_{k=2}^{n}$ にかえると

$$\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{a_k}\right)^2 = \left(\frac{1}{a_1}\right)^2 + \sum_{k=2}^{n}\left(\frac{1}{a_k}\right)^2 < \left(\frac{1}{1}\right)^2 + \left(\frac{1}{2-1} - \frac{1}{n}\right) = 2 - \frac{1}{n} < 2$$

となるが，$n \to \infty$ のときは

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{a_k}\right)^2 \leqq 2$$

となり，「=」が邪魔である．この等号を除くために解答では $\displaystyle\sum_{k=3}^{n}$ とした．