数列 $\{a_n\}$ を

$$a_1 = 3, \quad a_{n+1} = \frac{13a_n + 24}{4a_n + 17} \quad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

で定義し，数列 $\{b_n\}$ を $b_n = \dfrac{a_n - 2}{a_n + 3}$ $(n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ で定めるとき，次の問いに答えよ．

(1) b_1, b_2 の値を求めよ．
(2) 数列 $\{b_n\}$ が等比数列であることを示し，その一般項を求めよ．
(3) 数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ．
(4) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n$ を求めよ．

(22 山形大 工 3)

【答】

(1) $b_1 = \dfrac{1}{6}$, $b_2 = \dfrac{1}{30}$
(2) $b_n = \dfrac{1}{6}\left(\dfrac{1}{5}\right)^{n-1}$
(3) $a_n = 2 + \dfrac{5}{6\cdot 5^{n-1} - 1}$
(4) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = 2$

【解答】

$$a_1 = 3, \quad a_{n+1} = \frac{13a_n + 24}{4a_n + 17} \quad (n \geqq 1)$$

$$b_n = \frac{a_n - 2}{a_n + 3} \quad (n \geqq 1)$$

(1) $a_1 = 3$, $a_2 = \dfrac{13\cdot 3 + 24}{4\cdot 3 + 17} = \dfrac{63}{29}$ より

$$b_1 = \frac{3-2}{3+3} = \boldsymbol{\frac{1}{6}}, \qquad \cdots\cdots(答)$$

$$b_2 = \frac{\frac{63}{29} - 2}{\frac{63}{29} + 3} = \frac{63 - 58}{63 + 87} = \frac{5}{150} = \boldsymbol{\frac{1}{30}} \qquad \cdots\cdots(答)$$

である．

(2) 定義より

$$\begin{aligned} b_{n+1} &= \frac{a_{n+1} - 2}{a_{n+1} + 3} = \frac{\frac{13a_n + 24}{4a_n + 17} - 2}{\frac{13a_n + 24}{4a_n + 17} + 3} \\ &= \frac{5a_n - 10}{25a_n + 75} = \frac{a_n - 2}{5(a_n + 3)} \\ &= \frac{1}{5} b_n \end{aligned}$$

よって，数列 $\{b_n\}$ は初項 $\dfrac{1}{6}$，公比 $\dfrac{1}{5}$ の等比数列であり，一般項は

$$\boldsymbol{b_n = \frac{1}{6}\left(\frac{1}{5}\right)^{n-1}} \qquad \cdots\cdots(答)$$

である．

(3) 定義より

$$a_n - 2 = b_n(a_n + 3)$$
$$(1 - b_n)a_n = 3b_n + 2$$

$1 - b_n \fallingdotseq 0$ が確認されるから

$$a_n = \frac{3b_n + 2}{1 - b_n} = \frac{3 \cdot \frac{1}{6}\left(\frac{1}{5}\right)^{n-1} + 2}{1 - \frac{1}{6}\left(\frac{1}{5}\right)^{n-1}} = \frac{2 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{5}\right)^{n-1}}{1 - \frac{1}{6}\left(\frac{1}{5}\right)^{n-1}}$$
$$= \boldsymbol{\frac{12 \cdot 5^{n-1} + 3}{6 \cdot 5^{n-1} - 1}} \qquad \cdots\cdots(答)$$

である．

(4) (3) の結果より

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\left(2 + \frac{5}{6 \cdot 5^{n-1} - 1}\right) = \mathbf{2} \qquad \cdots\cdots(答)$$

である．

- $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{2 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{5}\right)^{n-1}}{1 - \frac{1}{6}\left(\frac{1}{5}\right)^{n-1}} = 2$ と計算してもよい．