n を 2 以上の自然数とする．A チームと B チームで野球の試合を繰り返し行い，先に 2 連勝したチームを優勝とする．n 回試合を行っても優勝チームが決まらない場合は引き分けとする．ただし，1 回の試合で A チームが勝つ確率を $\dfrac{2}{5}$，B チームが勝つ確率を $\dfrac{3}{5}$ とする．

(1) $2 \leqq k \leqq n$ のとき，ちょうど k 試合目で A チームが優勝する確率を p_k とする．$n = 6$ のとき，p_5 および p_6 を求めよ．

(2) j を $2 \leqq 2j-1 \leqq n$ を満たす自然数とする．このとき，p_{2j-1} を j の式で表せ．

(3) j を $2 \leqq 2j \leqq n$ を満たす自然数とする．このとき，p_{2j} を j の式で表せ．

(4) A チームが優勝する確率を q_n とする．n が偶数で，$n = 2m$ と表されるとき，$\displaystyle\lim_{m\to\infty} q_{2m}$ を求めよ．

(22 富山大 後 理 2)

【答】

(1) $p_5 = \dfrac{72}{3125}$，$p_6 = \dfrac{144}{15625}$

(2) $p_{2j-1} = \left(\dfrac{2}{5}\right)^j \left(\dfrac{3}{5}\right)^{j-1}$

(3) $p_{2j} = \left(\dfrac{2}{5}\right)^{j+1} \left(\dfrac{3}{5}\right)^{j-1}$

(4) $\dfrac{32}{95}$

【解答】

(1) ちょうど 5 試合目で A チームが優勝するのは，5 回目までの勝ちチームが順に「BABAA」となるときであるから

$$p_5 = \left(\frac{2}{5}\right)^3 \left(\frac{3}{5}\right)^2 = \boldsymbol{\frac{72}{3125}} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．

ちょうど 6 試合目で A チームが優勝するのは，6 回目までの勝ちチームが順に「ABABAA」となるときであるから

$$p_6 = \left(\frac{2}{5}\right)^4 \left(\frac{3}{5}\right)^2 = \boldsymbol{\frac{144}{15625}} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．

(2) ちょうど $2j-1$ 試合目で A チームが優勝するのは，$2j-1$ 回目までの勝ちチームが順に「$\underbrace{\text{BA}\cdots\text{BABA}}_{\substack{\text{A は } j-1 \text{ 回,}\\ \text{B は } j-1 \text{ 回}}}$A」となるときであるから

$$p_{2j-1} = \left(\boldsymbol{\frac{2}{5}}\right)^{\boldsymbol{j}} \left(\boldsymbol{\frac{3}{5}}\right)^{\boldsymbol{j-1}} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．

(3) ちょうど $2j$ 試合目で A チームが優勝するのは，$2j$ 回目までの勝ちチームが順に「$\underbrace{\text{AB}\cdots\text{ABAB}}_{\substack{\text{A は } j-1 \text{ 回,}\\ \text{B は } j-1 \text{ 回}}}$AA」となるときであるから

$$p_{2j} = \left(\boldsymbol{\frac{2}{5}}\right)^{\boldsymbol{j+1}} \left(\boldsymbol{\frac{3}{5}}\right)^{\boldsymbol{j-1}} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．

(4) A チームが優勝するのがちょうど k 試合目とすると，k は $2 \leqq k \leqq 2m$ であり $2m-1$ 通りがある．(2)，(3) より k を偶奇で場合分けすると，確率を q_{2m} は

$$\begin{aligned} q_{2m} &= \sum_{j=1}^{m} p_{2j} + \sum_{j=2}^{m} p_{2j-1} \\ &= \sum_{j=1}^{m} \frac{4}{25}\left(\frac{6}{25}\right)^{j-1} + \sum_{k=2}^{m} \frac{2}{5}\left(\frac{6}{25}\right)^{j-1} \end{aligned}$$

よって

$$\begin{aligned} \lim_{m\to\infty} q_{2m} &= \frac{\frac{4}{25}}{1-\frac{6}{25}} + \frac{\frac{12}{125}}{1-\frac{6}{25}} \\ &= \frac{4}{25-6} + \frac{12}{125-30} \\ &= \frac{4\cdot 5+12}{95} \\ &= \boldsymbol{\frac{32}{95}} \end{aligned}$$

……(答)

である．