A と B の 2 人が以下の規則 I と規則 II により点数を決めるゲームを行う．

規則 I：A は 1 個のさいころを 1 回投げて，出た目が偶数ならばそれを 2 で割ったときの商を A の点数とし，出た目が奇数ならば A の点数は 0 とする．

規則 II：B は 1 個のさいころを 1 回投げて，出た目を 3 で割ったときの余りを B の点数とする．

ゲームを行った結果，点数の大きい方を勝者とし，点数が同じ場合は引き分けとする．勝者が決まればそこでゲームは終了とし，引き分けの場合は同じ規則で次の回のゲームを行う．以降，勝者が決まるまでゲームを繰り返す．1 回のゲームで A が勝者となる確率を p, B が勝者となる確率を q，引き分けとなる確率を r とし，ゲームの回数が n 回以下で，A が勝者となる確率を P_n，B が勝者となる確率を Q_n とする．ただし，n は自然数とする．以下の各問に答えよ．

(1) p, q, r を求めよ．
(2) P_2 と Q_2 を求めよ．
(3) P_n と Q_n を求めよ．
(4) 極限値 $\lim_{n\to\infty} P_n$ と $\lim_{n\to\infty} Q_n$ を求めよ．

(22 茨城大 理 3)

【答】

(1) $p=\dfrac{1}{3}$, $q=\dfrac{7}{18}$, $r=\dfrac{5}{18}$
(2) $P_2=\dfrac{23}{54}$, $Q_2=\dfrac{161}{324}$
(3) $P_n=\dfrac{6}{13}\left\{1-\left(\dfrac{5}{18}\right)^n\right\}$, $Q_n\dfrac{7}{13}\left\{1-\left(\dfrac{5}{18}\right)^n\right\}$
(4) $\lim_{n\to\infty} P_n=\dfrac{6}{13}$, $\lim_{n\to\infty} Q_n=\dfrac{7}{13}$

【解答】

(1) A，B の得点を表にすると下のようになる

出た目	1	2	3	4	5	6
A の得点	0	1	0	2	0	3
B の得点	1	2	0	1	2	0

1 回のゲームで A が勝者となるのは

- A の得点が 1 点で B の得点が 0 点
- A の得点が 2 点で B の得点が 0 点または 1 点
- A の得点が 3 点で B の得点が 0 点または 1 点または 2 点

のときである．これらは排反であるから

$$p=\frac{1}{6}\cdot\frac{2}{6}+\frac{1}{6}\cdot\frac{4}{6}+\frac{1}{6}\cdot 1=\frac{12}{36}=\boldsymbol{\frac{1}{3}} \qquad \cdots\cdots(答)$$

である．1 回のゲームで B が勝者となるのは

- B の得点が 1 点で A の得点が 0 点
- B の得点が 2 点で A の得点が 0 点または 1 点

のときである．これらは排反であるから

$$q = \frac{2}{6}\cdot\frac{3}{6} + \frac{2}{6}\cdot\frac{4}{6} = \frac{14}{36} = \boldsymbol{\frac{7}{18}} \qquad \cdots\cdots(答)$$

である．1 回のゲームで引き分けとなるのは

- A，B の得点がともに 0 点
- A，B の得点がともに 1 点
- A，B の得点がともに 2 点

のときであり

$$r = \frac{3}{6}\cdot\frac{2}{6} + \frac{1}{6}\cdot\frac{2}{6} + \frac{1}{6}\cdot\frac{2}{6} = \frac{10}{36} = \boldsymbol{\frac{5}{18}} \qquad \cdots\cdots(答)$$

である．

- r は

$$r = 1-(p+q) = 1-\left(\frac{1}{3}+\frac{7}{18}\right) = 1-\frac{13}{18} = \frac{5}{18}$$

としてもよいが，検算 (確率の総和は 1) の意味も込めて p，q，r を独立に計算した．

(2) P_2 は 1 回目に A が勝つか 1 回目は引き分けて 2 回目に A が勝つときの確率であるから

$$P_2 = p + rp = \frac{1}{3} + \frac{5}{18}\cdot\frac{1}{3} = \boldsymbol{\frac{23}{54}} \qquad \cdots\cdots(答)$$

Q_2 は 1 回目に B が勝つか 1 回目は引き分けて 2 回目に B が勝つときの確率であるから

$$Q_2 = q + rq = \frac{7}{18} + \frac{5}{18}\cdot\frac{7}{18} = \boldsymbol{\frac{161}{324}} \qquad \cdots\cdots(答)$$

である．

(3) (2) と同じく考えて

$$P_n = p + rp + \cdots + r^{n-1}p = \frac{\frac{1}{3}\left\{1-\left(\frac{5}{18}\right)^n\right\}}{1-\frac{5}{18}} = \boldsymbol{\frac{6}{13}\left\{1-\left(\frac{5}{18}\right)^n\right\}} \qquad \cdots\cdots(答)$$

$$Q_n = q + rq + \cdots + r^{n-1}q = \frac{\frac{7}{18}\left\{1-\left(\frac{5}{18}\right)^n\right\}}{1-\frac{5}{18}} = \boldsymbol{\frac{7}{13}\left\{1-\left(\frac{5}{18}\right)^n\right\}} \qquad \cdots\cdots(答)$$

である．

- P_{n+1} は n 回以下で A が勝つか $(n+1)$ 回目で A が勝つときの確率であるから

$$P_{n+1} = P_n + \left(\frac{5}{18}\right)^n\cdot\frac{1}{3}$$

が成り立つ．よって，$n \geqq 2$ のとき

$$\begin{aligned} P_n &= P_1 + \sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{5}{18}\right)^k\cdot\frac{1}{3} = \frac{1}{3} + \frac{5}{18}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1-\left(\frac{5}{18}\right)^{n-1}}{1-\frac{5}{18}} \\ &= \frac{1}{3} + \frac{5}{3\cdot 13}\left\{1-\left(\frac{5}{18}\right)^{n-1}\right\} = \frac{6}{13} - \frac{5}{39}\left(\frac{5}{18}\right)^{n-1} \\ &= \frac{6}{13}\left\{1-\left(\frac{5}{18}\right)^n\right\} \end{aligned}$$

これは $n=1$ のときも成り立つ．

同じく

$$Q_{n+1} = Q_n + \left(\frac{5}{18}\right)^n\cdot\frac{7}{18}$$

であり，$n \geqq 2$ のとき

$$
\begin{aligned}
Q_n &= Q_1 + \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{5}{18}\right)^k \cdot \frac{7}{18} = \frac{7}{18} + \frac{5}{18} \cdot \frac{7}{18} \cdot \frac{1 - \left(\frac{5}{18}\right)^{n-1}}{1 - \frac{5}{18}} \\
&= \frac{7}{18} + \frac{35}{18 \cdot 13} \left\{1 - \left(\frac{5}{18}\right)^{n-1}\right\} = \frac{7}{13} - \frac{35}{18 \cdot 13} \left(\frac{5}{18}\right)^{n-1} \\
&= \frac{7}{13} \left\{1 - \left(\frac{5}{18}\right)^{n}\right\}
\end{aligned}
$$

これは $n = 1$ のときも成り立つ

(4) (3) より

$$\boldsymbol{\lim_{n \to \infty} P_n = \frac{6}{13}, \quad \lim_{n \to \infty} Q_n = \frac{7}{13}} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．