$f(x) = x\sin\left(\sin\dfrac{2}{x}\right)$ とおくと $\displaystyle\lim_{x\to\infty} f(x) = \boxed{\text{シ}}$，また $\displaystyle\lim_{x\to 0} f(x) = \boxed{\text{ス}}$ である．

(22 中部大 後 工 4)

【答】

シ	ス
2	0

【解答】

$$f(x) = x\sin\left(\sin\frac{2}{x}\right)$$

$\boxed{\text{シ}}$ について

$\infty\cdot 0$ の不定形を解消するように，式を変形する．$\dfrac{2}{x} = \theta$ とおくと

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty} f(x) &= \lim_{\theta\to 0}\frac{2}{\theta}\sin(\sin\theta)\\ &= \lim_{\theta\to 0}\left\{\frac{\sin(\sin\theta)}{\sin\theta}\cdot\frac{\sin\theta}{\theta}\cdot 2\right\}\\ &= 1\cdot 1\cdot 2\\ &= \mathbf{2}\end{aligned}$$

……(答)

である．

$\boxed{\text{ス}}$ について

$\left|\sin\left(\sin\dfrac{2}{x}\right)\right| \leqq 1$ より

$$0 \leqq |f(x)| = |x|\left|\sin\left(\sin\frac{2}{x}\right)\right| \leqq |x|\cdot 1 = |x| \underset{(x\to 0)}{\longrightarrow} 0$$

はさみうちの原理により

$$\lim_{x\to 0}|f(x)| = 0 \qquad \therefore\quad \lim_{x\to 0} f(x) = \mathbf{0}$$

……(答)

である．