xy 平面の第 1 象限内において，直線 $\ell : y = mx$ $(m > 0)$ と x 軸の両方に接している半径 a の円を C とし，円 C の中心を通る直線 $y = tx$ $(t > 0)$ を考える．また，直線 ℓ と x 軸，および，円 C のすべてにそれぞれ 1 点で接する円の半径を b とする．ただし，$b > a$ とする．

(1) m を用いて t を表せ．

(2) t を用いて $\dfrac{b}{a}$ を表せ．

(3) 極限値 $\displaystyle\lim_{m \to +0} \frac{1}{m}\left(\frac{b}{a} - 1\right)$ を求めよ．

(22 東北大 理系 4)

【答】

(1) $t = \dfrac{-1 + \sqrt{1 + m^2}}{m}$

(2) $\dfrac{b}{a} = 2t^2 + 1 + 2t\sqrt{t^2 + 1}$

(3) $\displaystyle\lim_{m \to +0} \frac{1}{m}\left(\frac{b}{a} - 1\right) = 1$

【解答】

(1) 直線 $y = tx$ は x 軸と直線 $y = mx$ のなす角の二等分線であり，$t = \tan\theta$ とすれば

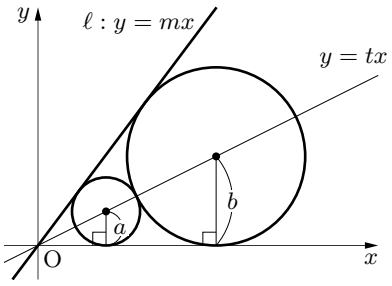
$$m = \tan 2\theta = \frac{2\tan\theta}{1 - \tan^2\theta} = \frac{2t}{1 - t^2}$$

$$\therefore \quad mt^2 + 2t - m = 0$$

$m > 0,\ t > 0$ より

$$\boldsymbol{t = \frac{-1 + \sqrt{1 + m^2}}{m}} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．



- 第 1 象限内において半径 a の円 C は x 軸と接するから，中心の座標を $(p,\ a)$ $(p > 0)$ とおくことができる．さらに，円 C は直線 $\ell : mx - y = 0$ と接するから

$$\frac{|mp - a|}{\sqrt{m^2 + 1}} = a$$

が成り立つ．中心 $(p,\ a)$ は ℓ の下側だから $a < mp$ を満たすから

$$mp - a = a\sqrt{m^2 + 1}$$

$$mp = (1 + \sqrt{m^2 + 1})a$$

したがって

$$t = \frac{a}{p} = \frac{m}{1 + \sqrt{m^2 + 1}}$$

- 第 1 象限内で x 軸に接する円という表現が気になるが (座標軸上の点はどの象限にも属さない)，細かいことなので伏せておく．

(2) 直線 ℓ と x 軸および円 C のすべてにそれぞれ 1 点で接する円を D とする．円 C, D の中心は直線 $y=tx$ 上にあるから，それぞれの座標は $\left(\frac{a}{t},\ a\right)$，$\left(\frac{b}{t},\ b\right)$ である．このとき，円 C, D はともに直線 ℓ と x 軸に接している．さらに，円 C, D は外接するから

$$\begin{aligned}
&(\text{中心間の距離}) = (\text{半径の和}) \\
&\sqrt{\left(\frac{b}{t}-\frac{a}{t}\right)^2+(b-a)^2} = a+b \\
&(b-a)\times\frac{\sqrt{1+t^2}}{t} = a+b \quad (\because\ b>a) \\
&b(\sqrt{1+t^2}-t) = a(\sqrt{1+t^2}+t) \\
\therefore\quad &\frac{b}{a} = \frac{\sqrt{t^2+1}+t}{\sqrt{t^2+1}-t} = \boldsymbol{2t^2+1+2t\sqrt{t^2+1}} \qquad \cdots\cdots(\text{答})
\end{aligned}$$

である．

- 第 1 象限内において半径 b の円 D は x 軸と接するから，中心の座標を $(q,\ b)$ $(q>0)$ とおくことができる．C に外接することから

$$\begin{aligned}
&(\text{中心間の距離}) = (\text{半径の和}) \\
&(q-p)^2+(b-a)^2 = (a+b)^2 \\
&(q-p)^2 = 4ab
\end{aligned}$$

円 C, D は ℓ にも接するので，中心は直線 $y=tx$ 上にあり，$a<b$ より $q>p$ でもあるから

$$\begin{aligned}
&q-p = 2\sqrt{ab} \\
&\frac{b}{t}-\frac{a}{t} = 2\sqrt{ab} \\
&b-a = 2t\sqrt{ab} \\
&\frac{b}{a}-2t\sqrt{\frac{b}{a}}-1 = 0 \\
&\sqrt{\frac{b}{a}} = t+\sqrt{t^2+1} \quad (\because\ \frac{b}{a}>0) \\
\therefore\quad &\frac{b}{a} = (t+\sqrt{t^2+1})^2 = 2t^2+1+2t\sqrt{t^2+1}
\end{aligned}$$

である．

(3) $m\to+0$ のとき，(1) より $t=\dfrac{m}{1+\sqrt{m^2+1}}\to+0$ であり，$m=\dfrac{2t}{1-t^2}$ である．(2) もあわせると

$$\begin{aligned}
\lim_{m\to+0}\frac{1}{m}\left(\frac{b}{a}-1\right) &= \lim_{t\to+0}\frac{1-t^2}{2t}(2t^2+2t\sqrt{t^2+1}) \\
&= \lim_{t\to+0}(1-t^2)(t+\sqrt{t^2+1}) \\
&= \boldsymbol{1} \qquad \cdots\cdots(\text{答})
\end{aligned}$$

である．