次の 2 つの極限に関する等式は，すでに知られているとしてよい．

$$\lim_{x\to 0}\frac{\log(1+x)}{x}=1,\quad \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$$

このとき，これらの等式を用いて，次の極限値を求めよ．

(1) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\log(1+\sin x)}{x}$

(2) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\log(\cos x)}{\sin^2 x}$

(22 甲南大 理工・知能情報)

【答】

(1) 1

(2) $-\dfrac{1}{2}$

【解答】

(1) $\dfrac{0}{0}$ の不定形が解消するように式を変形する．

$$\lim_{x\to 0}\frac{\log(1+\sin x)}{x}=\lim_{x\to 0}\left\{\frac{\log(1+\sin x)}{\sin x}\cdot\frac{\sin x}{x}\right\}$$

$x\to 0$ のとき，$\sin x\to 0$ であるから

$$(\text{与式})=1\cdot 1=\mathbf{1} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．

(2) $\dfrac{0}{0}$ の不定形が解消するように式を変形する．

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{\log(\cos x)}{\sin^2 x}&=\lim_{x\to 0}\frac{\log\left\{\cos\left(2\cdot\frac{x}{2}\right)\right\}}{\sin^2\left(2\cdot\frac{x}{2}\right)}\\&=\lim_{x\to 0}\frac{\log\left(1-2\sin^2\frac{x}{2}\right)}{\left(2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}\right)^2}\\&=\lim_{x\to 0}\left\{\frac{\log\left(1-2\sin^2\frac{x}{2}\right)}{-2\sin^2\frac{x}{2}}\cdot\frac{1}{(-2)\cos^2\frac{x}{2}}\right\}\end{aligned}$$

$x\to 0$ のとき，$-2\sin^2\dfrac{x}{2}\to 0$ であるから

$$(\text{与式})=1\cdot\frac{1}{(-2)\cdot 1^2}=-\mathbf{\frac{1}{2}} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．