log を自然対数とするとき，次の等式が成り立つ．

$$\lim_{h\to 0}\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}+h}\log(|\sin t|^{\frac{1}{h}})\,dt=\frac{1}{\boxed{\text{ウ}}}\log\frac{\boxed{\text{エ}}}{\boxed{\text{オ}}}$$

(22 明治大 理工・総合数理・政治経済 1(2))

【答】

ウ	エ	オ
2	3	4

【解答】

h が 0 に十分に近いとき，$t=\dfrac{\pi}{3}+h$ における $\sin t$ の符号は正であるから

$$\lim_{h\to 0}\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}+h}\log(|\sin t|^{\frac{1}{h}})\,dt=\lim_{h\to 0}\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}+h}\frac{1}{h}\log(\sin t)\,dt$$

である．$\log(\sin t)$ の原始関数を $F(t)$，すなわち，$F'(t)=\log(\sin t)$ を満たす関数とおくと

$$\begin{aligned}
&\lim_{h\to 0}\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}+h}\log(|\sin t|^{\frac{1}{h}})\,dt\\
&=\lim_{h\to 0}\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}+h}\frac{1}{h}F'(t)\,dt\\
&=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\Big[F(t)\Big]_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}+h}\\
&=\lim_{h\to 0}\frac{F\left(\frac{\pi}{3}+h\right)-F\left(\frac{\pi}{3}\right)}{h}\\
&=F'\left(\frac{\pi}{3}\right)\\
&=\log\left(\sin\frac{\pi}{3}\right)\\
&=\log\frac{\sqrt{3}}{2}\\
&=\boldsymbol{\frac{1}{2}\log\frac{3}{4}} \qquad \cdots\cdots(答)
\end{aligned}$$

である．