$f(x)$, $g(x)$ は実数全体において微分可能な関数とする．以下の問いに答えよ．

(1) $f(x)$ は実数全体において連続であることを示せ．

(2) 実数 a は定数とする．$f(x)$ が $x=a$ で極大であるとき，$f'(a)=0$ であることを示せ．

(3) 積の微分公式 $\{f(x)g(x)\}'=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$ が成り立つことを導関数の定義を用いて示せ．

(4) すべての自然数 n について，第 n 次導関数 $f^{(n)}(x)$, $g^{(n)}(x)$ が存在するものとする．すべての自然数 n と $F(x)=f(x)g(x)$ の第 n 次導関数 $F^{(n)}(x)$ について，次のライプニッツの公式が成り立つことを示せ．

$$F^{(n)}(x)=\sum_{j=0}^{n}{}_n\mathrm{C}_j f^{(n-j)}(x)g^{(j)}(x) \qquad \cdots\cdots \text{Ⓛ}$$

ただし，$f^{(0)}(x)=f(x)$, $g^{(0)}(x)=g(x)$ である．

(22 福島県医大 医 4)

【答】

(1) 略
(2) 略
(3) 略
(4) 略

【解答】

(1) $f(x)$ は実数全体において微分可能な関数なので，任意の実数 a に対し，$\displaystyle\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ は収束し，その値は $f'(a)$，すなわち

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=f'(a)$$

である．

$$\lim_{x\to a}\{f(x)-f(a)\}=\lim_{h\to 0}\left\{\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\cdot(x-a)\right\}=f'(a)\cdot 0=0$$

すなわち，任意の実数 a に対して

$$\lim_{x\to a}f(x)=f(a)$$

が成り立つ．よって，$f(x)$ は実数全体で連続である．　　　　　$\cdots\cdots$ (証明終わり)

(2) $f(x)$ が $x=a$ で極大であるから，a を含む十分小さい開区間において $x\fallingdotseq a$ ならば $f(x)<f(a)$ が成り立つ．この開区間において

$$x<a \text{ のとき，} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}>0 \qquad \therefore \lim_{x\to a-0}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\geqq 0 \qquad \cdots\cdots ①$$

$$x>a \text{ のとき，} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}<0 \qquad \therefore \lim_{x\to a+0}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\leqq 0 \qquad \cdots\cdots ②$$

$f(x)$ は微分可能であるから，$\displaystyle\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ は収束し，その値は $f'(a)$，すなわち

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=f'(a)$$

である．①，② とあわせると

$$f'(a)=0$$

である． …… (証明終わり)

- 背理法を用いる．

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=f'(a)$$

について，$f'(a)\neq 0$ と仮定する．

(i) $f'(a)>0$ と仮定すると，x が a に十分近いとき $\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}>0$ である．

$x>a$ のとき

$$f(x)-f(a)>0,\ \text{すなわち}\ f(x)>f(a)$$

となるが，これは $f(x)$ が $x=a$ で極大であることに反する．

(ii) $f'(a)<0$ と仮定すると，x が a に十分近いとき $\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}<0$ である．

$x<a$ のとき

$$f(x)-f(a)>0,\ \text{すなわち}\ f(x)>f(a)$$

となるが，これは $f(x)$ が $x=a$ で極大であることに反する．

(i)，(ii) により，$f(x)$ が $x=a$ で極大であるならば，$f'(a)=0$ である．

(3) 導関数の定義より

$$\begin{aligned}\{f(x)g(x)\}'&=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)g(x+h)-f(x)g(x)}{h}\\&=\lim_{h\to 0}\frac{\{f(x+h)-f(x)\}g(x+h)+f(x)\{g(x+h)-g(x)\}}{h}\\&=\lim_{h\to 0}\left\{\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\cdot g(x+h)+f(x)\cdot\frac{g(x+h)-g(x)}{h}\right\}\end{aligned}$$

$f(x)$，$g(x)$ は微分可能であるから

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=f'(x),\quad \lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h}=g'(x)$$

(1) により $g(x)$ は連続であるから

$$\lim_{h\to 0}g(x+h)=g(x)$$

が成り立ち

$$\{f(x)g(x)\}'=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$$

が成り立つ． …… (証明終わり)

(4) 何回でも微分可能な関数 $f(x)$，$g(x)$ の積 $F(x)=f(x)g(x)$ について，すべての自然数 n に対し

$$F^{(n)}(x)=\sum_{j=0}^{n}{}_n\mathrm{C}_j f^{(n-j)}(x)g^{(j)}(x)\quad\text{(ライプニッツの公式)}\qquad\cdots\cdots\ \text{Ⓛ}$$

が成り立つことを，n に関する数学的帰納法で証明する．

(i) $n=1$ のとき，Ⓛ は

$$\begin{aligned}F^{(1)}(x)&=\sum_{j=0}^{1}{}_1\mathrm{C}_j f^{(1-j)}(x)g^{(j)}(x)\\&={}_1\mathrm{C}_0 f^{(1)}(x)g^{(0)}(x)+{}_1\mathrm{C}_1 f^{(0)}(x)g^{(1)}(x)\\&=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)\end{aligned}$$

であり，これは (3) で証明済み．$n=1$ のとき Ⓛ が成り立つ．

(ii) $n=k$ のとき，Ⓛ が成り立つと仮定する．

$$
\begin{aligned}
F^{(k+1)}(x) &= \frac{d}{dx}F^{(k)}(x)\\
&= \frac{d}{dx}\sum_{j=0}^{k} {}_k\mathrm{C}_j f^{(k-j)}(x)g^{(j)}(x)\\
&= \sum_{j=0}^{k}\left\{{}_k\mathrm{C}_j \frac{d}{dx} f^{(k-j)}(x)g^{(j)}(x)\right\}\\
&= \sum_{j=0}^{k}\left\{{}_k\mathrm{C}_j \left(f^{(k-j+1)}(x)g^{(j)}(x)+f^{(k-j)}(x)g^{(j+1)}(x)\right)\right\} \quad (\because\ (3))\\
&= \sum_{j=0}^{k} {}_k\mathrm{C}_j f^{(k-j+1)}(x)g^{(j)}(x)+\sum_{j=0}^{k} {}_k\mathrm{C}_j f^{(k-j)}(x)g^{(j+1)}(x)\\
&= \sum_{j=0}^{k} {}_k\mathrm{C}_j f^{(k+1-j)}(x)g^{(j)}(x)+\sum_{j=1}^{k+1} {}_k\mathrm{C}_{j-1} f^{(k+1-j)}(x)g^{(j)}(x)\\
&= {}_k\mathrm{C}_0 f^{(k+1)}(x)g^{(0)}(x)+\sum_{j=1}^{k}({}_k\mathrm{C}_j+{}_k\mathrm{C}_{j-1})f^{(k+1-j)}(x)g^{(j)}(x)\\
&\qquad +{}_k\mathrm{C}_k f^{(0)}(x)g^{(k+1)}(x)
\end{aligned}
$$

となる．二項係数の性質として

$$
{}_k\mathrm{C}_0={}_{k+1}\mathrm{C}_0,\quad {}_k\mathrm{C}_j+{}_k\mathrm{C}_{j-1}={}_{k+1}\mathrm{C}_j\ (1\leqq j\leqq k),\quad {}_k\mathrm{C}_k={}_{k+1}\mathrm{C}_{k+1}
$$

が成り立つから

$$
\begin{aligned}
F^{(k+1)}(x) &= {}_{k+1}\mathrm{C}_0 f^{(k+1)}(x)g^{(0)}(x)+\sum_{j=1}^{k} {}_{k+1}\mathrm{C}_j f^{(k+1-j)}(x)g^{(j)}(x)\\
&\qquad +{}_{k+1}\mathrm{C}_{k+1} f^{(0)}(x)g^{(k+1)}(x)\\
&= \sum_{j=0}^{k+1} {}_{k+1}\mathrm{C}_j f^{(k+1-j)}(x)g^{(j)}(x)
\end{aligned}
$$

となる．$n=k+1$ のときも Ⓛ が成り立つ．

以上，(i)，(ii) より，すべての自然数 n に対し Ⓛ が成り立つ．　　……(証明終わり)