座標平面上において，点 $(a,\ b)$ から曲線 $y=e^x$ に異なる 2 本の接線が引けるための条件を，a と b を用いて表しなさい．

(22 公立千歳科技大 理工 1(8))

【答】 $0<b<e^a$

【解答】

$$y=e^x$$

$y'=e^x$ であり，曲線 $y=e^x$ 上の点 $(t,\ e^t)$ における接線の方程式は

$$y=e^t(x-t)+e^t$$

である．点 $(a,\ b)$ から曲線 $y=e^x$ に異なる 2 本の接線が引けるための条件は

$$b=e^t(a-t)+e^t$$

を満たす実数 t が 2 つ存在することである ($\because$ $y=e^x$ では 2 重接線は存在しない)．

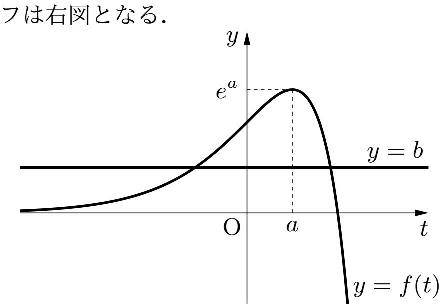
$f(t)=(a+1-t)e^t$ とおき，曲線 $y=f(t)$ と直線 $y=b$ が 2 つの共有点をもつための条件を求める．

$$\begin{aligned} f'(t)&=-e^t+(a+1-t)e^t \\ &=(a-t)e^t \end{aligned}$$

であり，$f(t)$ の増減は下表となり，$y=f(t)$ のグラフは右図となる．

t	$\cdots$	a	$\cdots$
$f'(t)$	$+$	0	$-$
$f(t)$	$\nearrow$	e^a	$\searrow$

$$\lim_{t\to-\infty}f(t)=0,\quad \lim_{t\to\infty}f(t)=-\infty$$



$y=f(t)$ と 2 つの共有点をもつ直線 $y=b$ は右図となるから，求める条件は

$$\boldsymbol{0<b<e^a} \quad \cdots\cdots(答)$$

である．

- $\displaystyle\lim_{t\to-\infty}f(t)=0$ については，まず $t<a+1$ を満たす t に対して

  $$0<f(t) \qquad \cdots\cdots ㋐$$

  である．

  また，$e^u>1+u+\dfrac{u^2}{2}$ $(u>0)$ (教科書の例題) を既知とし，$t=-u$ とおくと

  $$f(t)=f(-u)=(a+1+u)e^{-u}<\frac{a+1+u}{1+u+\dfrac{u^2}{2}}=\frac{\dfrac{a+1}{u}+1}{\dfrac{1}{u}+1+\dfrac{u}{2}}$$

  $t\to-\infty$ のとき $u\to\infty$ であるから

  $$\lim_{t\to-\infty}f(t)\leqq 0 \qquad \cdots\cdots ㋑$$

  ㋐, ㋑ とはさみうちの原理より $\displaystyle\lim_{t\to-\infty}f(t)=0$ を得る．