2 つの曲線 $A : y = e^{-2x}(x^2 - 2x - 5)$, $B : y = -x^2 + x - 25$ がある．ただし，e は自然対数の底である．点 P は曲線 A 上の点で，P の y 座標は，曲線 A を表す関数の極小値に等しいものとする．曲線 A 上の点 P における接線 ℓ_1 と，曲線 B 上の点 Q における接線 ℓ_2 が平行であるとき，次の問いに答えよ．

(1) 曲線 A を表す関数 y の増減を調べ，点 P の座標を求めよ．
(2) 点 Q の座標を求めよ．
(3) 曲線 B 上の点 Q における法線 m と曲線 A の交点を R とするとき，点 P，点 Q，点 R を結ぶ直線によって囲まれる三角形の面積 S を求めよ．

(22 岩手大 理工 4)

【答】
(1) $\mathrm{P}(-1,\ -2e^2)$
(2) $\mathrm{Q}\left(\dfrac{1}{2},\ -\dfrac{99}{4}\right)$
(3) $S = \dfrac{3}{16}\left(99 - \dfrac{23}{e}\right)$

【解答】

$$A : y = e^{-2x}(x^2 - 2x - 5),$$
$$B : y = -x^2 + x - 25$$

(1) $f(x) = e^{-2x}(x^2 - 2x - 5)$ とおくと

$$\begin{aligned} f'(x) &= e^{-2x}(-2)\cdot(x^2 - 2x - 5) + e^{-2x}\cdot(2x - 2) \\ &= -2e^{-2x}(x^2 - 3x - 4) \\ &= -2e^{-2x}(x + 1)(x - 4) \end{aligned}$$

$f(x)$ の増減は下表となる．

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	4	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\searrow$	極小	$\nearrow$	極大	$\searrow$

極小値は $f(-1) = -2e^2$ であり，点 P の座標は

$$\mathbf{P}\left(\boldsymbol{-1,\ -2e^2}\right) \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．

(2) P における A の接線 ℓ_1 は x 軸に平行だから，接線 ℓ_2 も x 軸に平行であり，点 Q は放物線 B の頂点である．

$$y = -\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{99}{4}$$

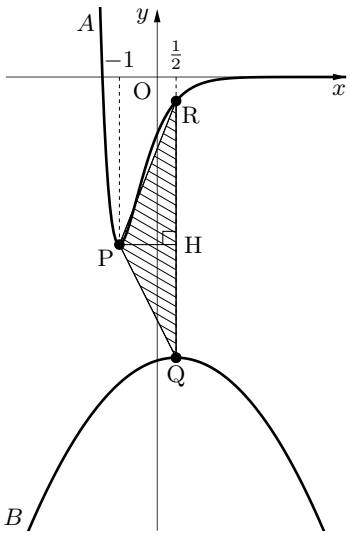
より，Q の座標は

$$\mathbf{Q}\left(\boldsymbol{\frac{1}{2},\ -\frac{99}{4}}\right) \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．

(3) 定義から，$\mathrm{R}\left(\dfrac{1}{2},\ -\dfrac{23}{4e}\right)$ である．また，P から直線 QR に下ろした垂線の足を H とおくと，△PQR の面積 S は

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2}\mathrm{QR}\cdot\mathrm{PH} \\ &= \frac{1}{2}\left(-\frac{23}{4e}+\frac{99}{4}\right)\cdot\frac{3}{2} \\ &= \boldsymbol{\frac{3}{16}\left(99-\frac{23}{e}\right)} \end{aligned}$$

……(答)

である．