p を正の実数とする．曲線 $y = \sin x$ $(x > 0)$ の接線で点 $(-p,\ 0)$ を通るものをすべて考え，それらの接点の x 座標を小さい方から順に a_1, a_2, a_3, $\cdots$, a_n, $\cdots$ とする．このとき，以下の問いに答えよ．

(1) $n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots$ に対して，$\tan a_n = a_n + p$ が成り立つことを示せ．

(2) $n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots$ に対して，$a_{n+1} - a_n > \pi$ が成り立つことを示せ．

(3) $a_1 = \dfrac{\pi}{3}$ のとき，$n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots$ に対して，$\tan a_{n+1} > n\pi + \sqrt{3}$ が成り立つことを示せ．

(22 熊本大 医 3)

【答】

(1) 略

(2) 略

(3) 略

【解答】

$$y = \sin x \ (x > 0)$$

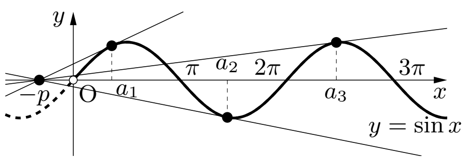
(1) $$y' = \cos x$$

曲線上の点 $(a_n,\ \sin a_n)$ における接線の方程式は

$$y = \cos a_n \cdot (x - a_n) + \sin a_n$$

である．これが点 $(-p,\ 0)$ を通るとき

$$0 = \cos a_n \cdot (-p - a_n) + \sin a_n$$



となる．$\cos a_n = 0$ とすると $\sin a_n = 0$ となり，これを満たす a_n は存在しない．したがって，$\cos a_n \fallingdotseq 0$ であり

$$0 = -p - a_n + \tan a_n$$

$$\therefore \quad \tan a_n = a_n + p$$

が成り立つ． $\cdots\cdots$ (証明終わり)

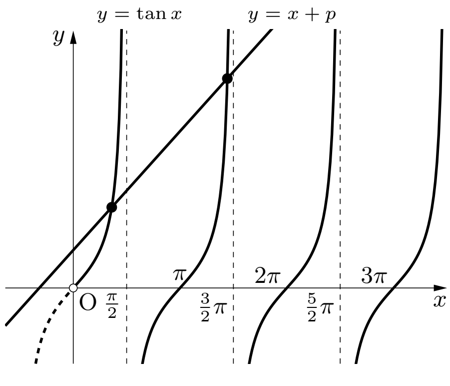
(2) (1) の結果から，$\{a_n\}$ は曲線 $y = \tan x$ と直線 $y = x + p$ の $x > 0$ における交点の x 座標を小さい順に並べてできる数列である．

$$\tan a_n = a_n + p \qquad \cdots\cdots ①$$

$$\left((n-1)\pi < a_n < (n-1)\pi + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\tan a_{n+1} = a_{n+1} + p \qquad \cdots\cdots ②$$

$$\left(n\pi < a_{n+1} < n\pi + \frac{\pi}{2}\right)$$



$y = \tan x$ は周期が π の関数であるから

$$\begin{aligned}
&\tan a_{n+1} - \tan(a_n + \pi) \\
&= \tan a_{n+1} - \tan a_n \\
&= (a_{n+1} + p) - (a_n + p) \quad (\because\ ①,\ ②) \\
&= a_{n+} - a_n \\
&> 0 \quad (\because\ \{a_n\} \text{ は増加数列})
\end{aligned}$$

a_{n+1}, $a_n + \pi$ はともに範囲 $n\pi < x < n\pi + \dfrac{\pi}{2}$ の値であり，この区間で $\tan x$ は単調増加であるから

$$a_{n+1} > a_n + \pi \qquad \therefore \quad a_{n+1} - a_n > \pi$$

が成り立つ． $\cdots\cdots$ (証明終わり)

(3) ①, ② より

$$\begin{aligned}\tan a_{k+1} - \tan a_k &= (a_{k+1} + p) - (a_k + p)\\ &= a_{k+1} - a_k\\ &> \pi \quad (\because\ (2)\text{ の結果})\end{aligned}$$

辺々を $k = 1,\ 2,\ \cdots,\ n$ として加えると

$$\sum_{k=1}^{n} (\tan a_{k+1} - \tan a_k) = \sum_{k=1}^{n} \pi$$

$$\therefore \quad \tan a_{n+1} - \tan a_1 = n\pi$$

$\tan a_1 = \tan \dfrac{\pi}{3} = \sqrt{3}$ であるから

$$\tan a_{k+1} = n\pi + \sqrt{3}$$

が成り立つ. …… (証明終わり)