xy 平面上の曲線 C を，媒介変数 t を用いて次のように定める．

$$x = 5\cos t + \cos 5t, \quad y = 5\sin t - \sin 5t \quad (-\pi \leqq t < \pi)$$

以下の問いに答えよ．

(1) 区間 $0 < t < \dfrac{\pi}{6}$ において，$\dfrac{dx}{dt} < 0$，$\dfrac{dy}{dx} < 0$ であることを示せ．

(2) 曲線 C の $0 \leqq t \leqq \dfrac{\pi}{6}$ の部分，x 軸，直線 $y = \dfrac{1}{\sqrt{3}}x$ で囲まれた図形の面積を求めよ．

(3) 曲線 C は x 軸に関して対称であることを示せ．また，C 上の点を原点を中心として反時計回りに $\dfrac{\pi}{3}$ だけ回転させた点は C 上にあることを示せ．

(4) 曲線 C の概形を図示せよ．

(22 九州大 理系 5)

【答】

(1) 略

(2) $\dfrac{5}{3}\pi$

(3) 略

(4) 略

【解答】

$$C : \begin{cases} x = 5\cos t + \cos 5t \\ y = 5\sin t - \sin 5t \end{cases} \quad (-\pi \leqq t < \pi)$$

(1) x, y を t で微分すると

$$\frac{dx}{dt} = -5\sin t - 5\sin 5t = -10\sin 3t\cos 2t$$

$$\frac{dy}{dt} = 5\cos t - 5\cos 5t = 10\sin 3t\sin 2t$$

$0 < t < \dfrac{\pi}{6}$ においては，$\sin 3t > 0$，$\cos 2t > 0$，$\sin 2t > 0$ であるから

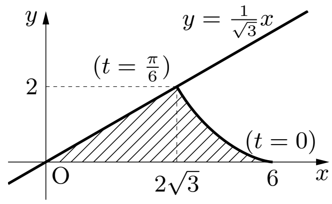
$$\frac{dx}{dt} < 0, \quad \frac{dy}{dt} > 0 \qquad \cdots\cdots(\text{証明終わり})$$

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} < 0 \qquad \cdots\cdots(\text{証明終わり})$$

である．

(2) (1) より $0 \leqq t \leqq \dfrac{\pi}{6}$ における x, y の増減は下表となるから，与えられた図形は右図の斜線部分である．

t	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{6}$
x	6	$\leftarrow$	$2\sqrt{3}$
y	0	$\uparrow$	2



この図形の面積 S は

$$
\begin{aligned}
S &= \frac{1}{2}\cdot 2\sqrt{3}\cdot 2 + \int_{2\sqrt{3}}^{6} y\,dx \\
&= 2\sqrt{3} + \int_{\frac{\pi}{6}}^{0} y\cdot\frac{dx}{dt}\,dt \\
&= 2\sqrt{3} + \int_{\frac{\pi}{6}}^{0} (5\sin t - \sin 5t)\cdot(-5)(\sin t + \sin 5t)\,dt \\
&= 2\sqrt{3} + 5\int_{0}^{\frac{\pi}{6}} (5\sin^2 t + 4\sin 5t\sin t - \sin^2 5t)\,dt \\
&= 2\sqrt{3} + 5\int_{0}^{\frac{\pi}{6}} \left\{5\cdot\frac{1-\cos 2t}{2} - 2(\cos 6t - \cos 4t) - \frac{1-\cos 10t}{2}\right\}dt \\
&= 2\sqrt{3} + 5\left[2t - \frac{5}{4}\sin 2t - \frac{\sin 6t}{3} + \frac{\sin 4t}{2} + \frac{\sin 10t}{20}\right]_0^{\frac{\pi}{6}} \\
&= 2\sqrt{3} + 5\left\{\frac{\pi}{3} - \frac{5}{4}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} - 0 + \frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{20}\cdot\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right\} \\
&= 2\sqrt{3} + 5\left\{\frac{\pi}{3} - \frac{(25-10+1)\sqrt{3}}{40}\right\} \\
&= \boldsymbol{\frac{5}{3}\pi} \qquad \cdots\cdots\text{(答)}
\end{aligned}
$$

である．

(3) $x(t) = 5\cos t + \cos 5t,\ y(t) = 5\sin t - \sin 5t$ とおくと

$$
\begin{aligned}
x(-t) &= 5\cos t + \cos 5t = x(t) \\
y(-t) &= -5\sin t + \sin 5t = -y(t)
\end{aligned}
$$

点 $(x(t),\ y(t))$ と $(x(-t),\ y(-t))$ は x 軸に関して対称であるから，C の $-\pi < t \leqq 0$ の部分と $0 \leqq t < \pi$ の部分は x 軸に関して対称である．よって，$-\pi \leqq t < \pi$ の範囲で定義される C は x 軸に関して対称である． …… (証明終わり)

つぎに，$\mathrm{P}(x(t),\ y(t))$，$\mathrm{Q}\left(x\left(t+\frac{\pi}{3}\right),\ y\left(t+\frac{\pi}{3}\right)\right)$ とおく．複素数平面上で P を原点を中心として反時計回りに $\frac{\pi}{3}$ だけ回転させた点は

$$
\begin{aligned}
&\{x(t)+y(t)i\}\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right) \\
&= \{x(t)+y(t)i\}\cdot\frac{1+i\sqrt{3}}{2} \\
&= \frac{x(t)-\sqrt{3}y(t)}{2} + \frac{\sqrt{3}x(t)+y(t)}{2}i
\end{aligned}
$$

である．一方

$$
\begin{aligned}
&x\left(t+\frac{\pi}{3}\right) + y\left(t+\frac{\pi}{3}\right)i \\
&= \left\{5\cos\left(t+\frac{\pi}{3}\right) + \cos 5\left(t+\frac{\pi}{3}\right)\right\} + i\left\{5\sin\left(t+\frac{\pi}{3}\right) - \sin 5\left(t+\frac{\pi}{3}\right)\right\} \\
&= 5\left(\frac{1}{2}\cos t - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin t\right) + \frac{1}{2}\cos 5t + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin 5t \\
&\qquad + i\left\{5\left(\frac{1}{2}\sin t + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos t\right) - \left(\frac{1}{2}\sin 5t - \frac{\sqrt{3}}{2}\cos 5t\right)\right\} \\
&= \frac{x(t)-\sqrt{3}y(t)}{2} + \frac{\sqrt{3}x(t)+y(t)}{2}i
\end{aligned}
$$

であるから，P を原点を中心として反時計回りに $\frac{\pi}{3}$ だけ回転させた点は Q である．

すなわち，C 上の点を原点を中心として反時計回りに $\frac{\pi}{3}$ だけ回転させた点は C 上にある．

- $\{x(t)+y(t)i\}\left(\cos\dfrac{\pi}{3}+i\sin\dfrac{\pi}{3}\right)=\dfrac{x(t)-\sqrt{3}y(t)}{2}+\dfrac{\sqrt{3}x(t)+y(t)}{2}i$ の実部，虚部を次のように変形してもよい．

$$\begin{aligned}
\frac{x(t)-\sqrt{3}y(t)}{2} &= \frac{1}{2}\left\{(5\cos t+\cos 5t)-\sqrt{3}(5\sin t-\sin 5t)\right\}\\
&= 5\left(\cos t\cdot\frac{1}{2}-\sin t\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\right)+\left(\cos 5t\cdot\frac{1}{2}+\sin 5t\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\\
&= 5\cos\left(t+\frac{\pi}{3}\right)+\cos\left(5t-\frac{\pi}{3}\right)\\
&= 5\cos\left(t+\frac{\pi}{3}\right)+\cos\left(5t+\frac{5\pi}{3}\right)\\
&= 5\cos\left(t+\frac{\pi}{3}\right)+\cos 5\left(t+\frac{\pi}{3}\right)\\
&= x\left(t+\frac{\pi}{3}\right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\sqrt{3}x(t)+y(t)}{2} &= \frac{1}{2}\left\{\sqrt{3}(5\cos t+\cos 5t)+(5\sin t-\sin 5t)\right\}\\
&= 5\left(\sin t\cdot\frac{1}{2}+\cos t\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\right)-\left(\sin 5t\cdot\frac{1}{2}-\cos 5t\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\\
&= 5\sin\left(t+\frac{\pi}{3}\right)-\sin\left(5t-\frac{\pi}{3}\right)\\
&= 5\sin\left(t+\frac{\pi}{3}\right)-\sin\left(5t+\frac{5\pi}{3}\right)\\
&= 5\sin\left(t+\frac{\pi}{3}\right)-\sin 5\left(t+\frac{\pi}{3}\right)\\
&= y\left(t+\frac{\pi}{3}\right)
\end{aligned}$$

したがって

$$\{x(t)+y(t)i\}\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)=x\left(t+\frac{\pi}{3}\right)+iy\left(t+\frac{\pi}{3}\right)$$

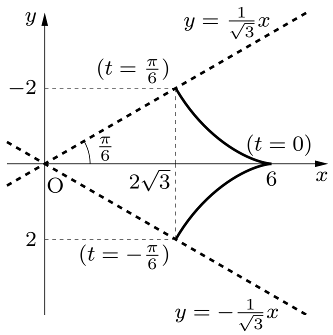
が成り立つ．

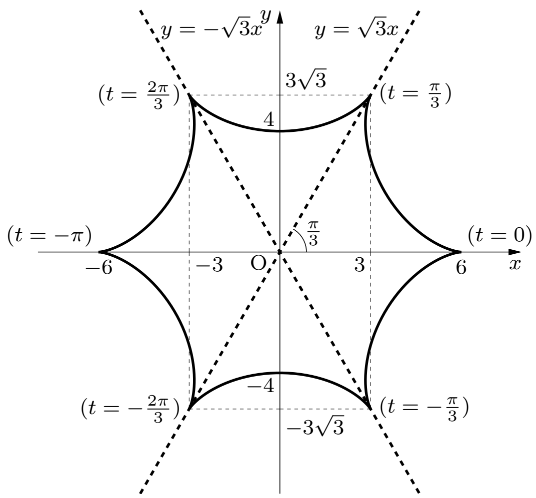
(4) (3) の結果より，C の $0\leqq t\leqq\dfrac{\pi}{6}$ の部分と $-\dfrac{\pi}{6}\leqq t\leqq 0$ の部分は x 軸に関して対称であるから，C の $-\dfrac{\pi}{6}\leqq t\leqq\dfrac{\pi}{6}$ の部分は下の左図となる．

これを原点を中心として反時計回りに $\dfrac{\pi}{3}$ だけ回転させた部分も C 上にある．

$$(x(t+2\pi),\ y(t+2\pi))=(x(t),\ y(t))$$

であることも合わせて，この回転移動を繰り返すと C の $-\pi\leqq t<\pi$ の概形は下の右図となることがわかる．





- 曲線 C は，半径 1 の円周上の定点が，原点を中心とする半径 6 の円の内側を滑らずに転がるときに描く曲線がであり，ハイポサイクロイド (内サイクロイド) と呼ばれている．