関数 $f(x)=\dfrac{e^{|x|}}{x}$ について以下の問いに答えなさい．解答欄には途中の計算過程も書きなさい．

(1) $y=f(x)$ のグラフの概形をかきなさい．変曲点についても明記すること．なお，$f(x)$ に関する極限は証明せずに用いてよい．

(2) 曲線 $y=f(x)$ の接線のうち，原点を通るものの式を求めなさい．また，接点の座標をすべて求めなさい．

(22 公立千歳科技大 中期 理工 5)

【答】

(1) 略

(2) $y=\dfrac{e^2}{4}x$，接点の座標は $\left(\pm 2,\ \pm\dfrac{e^2}{2}\right)$ (複号同順)

【解答】

$$f(x)=\frac{e^{|x|}}{x}\ (x \neq 0)$$

(1) $f(-x)=-f(x)$ が成り立つから，$y=f(x)$ のグラフは原点に関して対称であり $x>0$ での増減，凹凸を調べる．$x>0$ のとき

$$f(x)=\frac{e^x}{x},$$

$$f'(x)=\frac{e^x\cdot x-e^x\cdot 1}{x^2}=\frac{(x-1)e^x}{x^2},$$

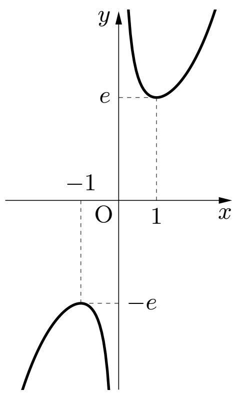
$$f''(x)=\frac{\{e^x+(x-1)e^x\}\cdot x^2-(x-1)e^x\cdot 2x}{x^4}$$

$$=\frac{(x^2-2x+2)e^x}{x^3}=\frac{(x-1)^2+1}{x^3}$$

$x>0$ のとき，$f''(x)$ は常に正だから，グラフは変曲点をもたず下に凸である．また，$f(x)$ の増減は下表となる．

x	(0)	$\cdots$	1	$\cdots$	(∞)
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	(∞)	↘	e	↗	(∞)

対称性も考慮すると，$y=f(x)$ のグラフは右図となる．



(2) $x>0$ のとき $y=f(x)$ 上の点 $(t,\ f(t))$ における接線の方程式は

$$y=\frac{(t-1)e^t}{t^2}(x-t)+\frac{e^t}{t}$$

である．これが原点を通るのは

$$0=\frac{(t-1)e^t}{t^2}(0-t)+\frac{e^t}{t}$$

$$0=\frac{(2-t)e^t}{t}\qquad \therefore\quad t=2$$

のときであり，接線の方程式は

$$y=\frac{e^2}{4}x\qquad\cdots\cdots①$$

である．このときの接点の座標は $\left(2,\ \dfrac{e^2}{2}\right)$ である．

① は原点に関して対称であるから，求める接線の方程式は

$$\boldsymbol{y = \frac{e^2}{4}x}$$ ……(答)

であり，接点の座標は

$$\boldsymbol{\left(\pm 2,\ \pm\frac{e^2}{2}\right)}$$ **(複号同順)** ……(答)

である．