a を正の定数として，実数全体で定義された関数

$$f(x)=\frac{x+a}{x^2+3a^2}$$

を考える．

(1) 関数 $f(x)$ の増減を調べよ．また，関数 $f(x)$ の最大値，最小値，およびそれらを与える x の値を，それぞれ a を用いて表せ．

(2) 方程式 $f(f(x))=0$ が実数解をもつような a の値の範囲を求めよ．

(3) (2) で求めた a の値の範囲において，関数 $f(f(x))$ の最大値および最小値を，それぞれ a を用いて表せ．

(22 富山大 理・工・都市・医・薬 3)

【答】

(1) $x=a$ のとき最大値 $\dfrac{1}{2a}$，$x=-3a$ のとき最小値 $-\dfrac{1}{6a}$

(2) $0<a\leqq\dfrac{\sqrt{6}}{6}$

(3) 最大値 $\dfrac{1}{2a}$，最小値 $\begin{cases} -\dfrac{1}{6a} & \left(0<a\leqq\dfrac{\sqrt{2}}{6}\text{のとき}\right) \\ \dfrac{6a(6a^2-1)}{108a^4+1} & \left(\dfrac{\sqrt{2}}{6}\leqq a\leqq\dfrac{\sqrt{6}}{6}\text{のとき}\right)\end{cases}$

【解答】

$$f(x)=\frac{x+a}{x^2+3a^2}$$

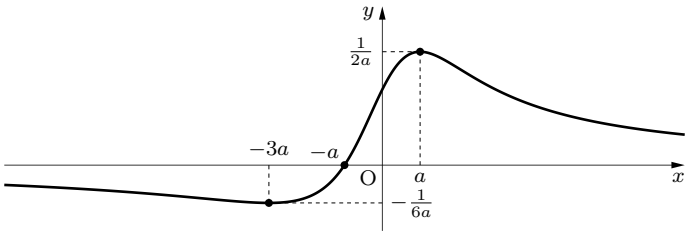
(1) $f(x)$ を微分すると

$$\begin{aligned} f'(x)&=\frac{1\cdot(x^2+3a^2)-(x+a)\cdot 2x}{(x^2+3a^2)^2}\\ &=\frac{-x^2-2ax+3a^2}{(x^2+3a^2)^2}\\ &=\frac{-(x+3a)(x-a)}{(x^2+3a^2)^2}\end{aligned}$$

$a>0$ より，$f(x)$ の増減は下表となる．

x	$\cdots$	$-3a$	$\cdots$	a	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\searrow$	$-\dfrac{1}{6a}$	$\nearrow$	$\dfrac{1}{2a}$	$\searrow$

$\displaystyle\lim_{x\to\pm\infty}f(x)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{1+\dfrac{a}{x}}{x+\dfrac{3a^2}{x}}=0$ であり，$y=f(x)$ のグラフは下図となる．



よって，$f(x)$ は

$$\boldsymbol{x = a} \text{ のとき，} \quad \text{最大値} \ \boldsymbol{\frac{1}{2a}} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

$$\boldsymbol{x = -3a} \text{ のとき，} \quad \text{最小値} \ \boldsymbol{-\frac{1}{6a}} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

をとる．

(2) $f(f(x)) = 0$ が実数解をもつ条件は

$$f(f(x)) = 0 \iff \frac{f(x)+a}{\{f(x)\}^2 + 3a^2} = 0$$

$$\therefore \quad f(x) = -a$$

より，$y = f(x)$ のグラフと直線 $y = -a$ (< 0) が共有点をもつことである．$y = f(x)$ のグラフより，求める値の範囲は

$$-\frac{1}{6a} \leqq -a < 0 \iff 0 < a \leqq \frac{1}{6a} \qquad \cdots\cdots ①$$

$$\therefore \quad \boldsymbol{0 < a \leqq \frac{\sqrt{6}}{6}} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．

(3) $y = f(x)$, $z = f(f(x)) = f(y)$ とおく．求める最大値，最小値は z の最大値，最小値であり，(1) のグラフより，x が実数全体を動くとき

$$-\frac{1}{6a} \leqq y \leqq \frac{1}{2a}$$

であるから，$-\dfrac{1}{6a} \leqq y \leqq \dfrac{1}{2a}$ における z の最大値，最小値を求めればよい．

(1) のグラフの x 軸，y 軸をそれぞれ y 軸，z 軸に置き換えると $z = f(y)$ のグラフとなるから，正の 2 数 $\dfrac{1}{2a}$ と a，および負の 2 数 $-\dfrac{1}{6a}$ と $-3a$ の大小関係を調べる．

(i) $\dfrac{1}{2a}$ と a の大小について

① より

$$\frac{1}{2a} - a \geqq \frac{1}{2a} - \frac{1}{6a} = \frac{1}{3a} > 0 \qquad \therefore \quad a < \frac{1}{2a}$$

よって，z は $y = a$ で最大値 $\dfrac{1}{2a}$ をとる．

(ii) $-\dfrac{1}{6a}$ と $-3a$ の大小について

$$-\frac{1}{6a} - (-3a) = \frac{18a^2 - 1}{6a} = \frac{3}{a}\left(a + \frac{\sqrt{2}}{6}\right)\left(a - \frac{\sqrt{2}}{6}\right)$$

であり，$\dfrac{3}{a}\left(a + \dfrac{\sqrt{2}}{6}\right) > 0$ であるから，a と $\dfrac{\sqrt{2}}{6}$ の大小により，$-\dfrac{1}{6a}$ と $-3a$ の大小が決まる．

(i) $0 < a \leqq \dfrac{\sqrt{2}}{6}$ のとき，$-\dfrac{1}{6a} \leqq -3a$ であり，z は

$y = -3a$ のとき最小値 $f(-3a) = -\dfrac{1}{6a}$ をとる．

(ii) $\dfrac{\sqrt{2}}{6} \leqq a \leqq \dfrac{\sqrt{6}}{6}$ のとき，$-3a \leqq -\dfrac{1}{6a}$ であり，z は

$y = -\dfrac{1}{6a}$ のとき，最小値 $f\left(-\dfrac{1}{6a}\right) = \dfrac{6a(6a^2 - 1)}{108a^4 + 1}$ をとる．

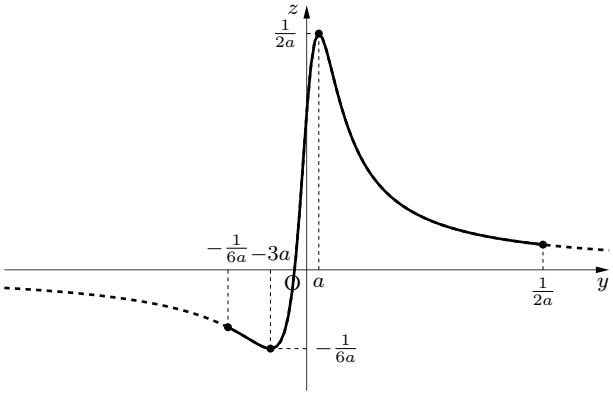
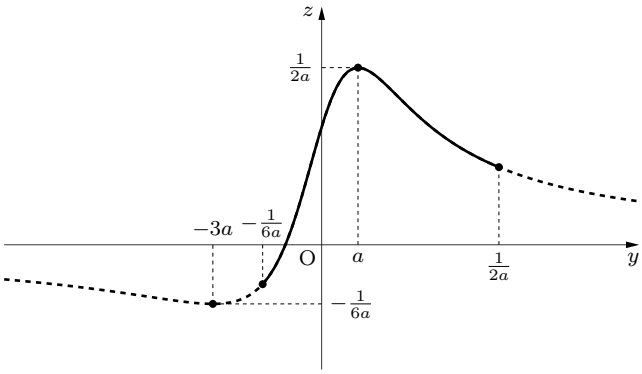
以上をまとめると，$f(f(x))$ ついて

$$\textbf{最大値}\ \boldsymbol{\frac{1}{2a}} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

$$\textbf{最小値}\ \begin{cases} -\dfrac{1}{6a} & \left(0 < a \leqq \dfrac{\sqrt{2}}{6}\text{のとき}\right) \\ \dfrac{6a(6a^2-1)}{108a^4+1} & \left(\dfrac{\sqrt{2}}{6} \leqq a \leqq \dfrac{\sqrt{6}}{6}\text{のとき}\right) \end{cases} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．

- $0 < a \leqq \dfrac{\sqrt{2}}{6}$ のときの $z = f(y)$ のグラフは下図の実線部分となり



$\dfrac{\sqrt{2}}{6} \leqq a \leqq \dfrac{\sqrt{6}}{6}$ のときの $z = f(y)$ のグラフは下図の実線部分となる．