

次の問いに答えよ．必要があれば，自然対数の底 e が $\frac{5}{2} < e < 3$ を満たすこと，および $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{x} = \infty$ であることを用いてよい．

(1) k を定数とするとき，方程式 $e^{2x} = kx$ の異なる実数解の個数を求めよ．

(2) (1) の方程式 $e^{2x} = kx$ がただ 1 つの実数解をもつ k に対して，関数

$$f(x) = e^{2x} - kx$$

の $0 \leq x \leq 1$ における最大値を求めよ．

(22 弘前大 理工 9)

【答】

(1)	k	...	0	...	$2e$...
	個数	1	0	0	1	2

(2) $k = 2e$ のとき， $e^2 - 2e$ ； $k < 0$ のとき， $e^2 - k$

【解答】

(1) $e^{2x} = kx$ …… ①

$x = 0$ は ① の解でないから

$$\text{①} \iff \frac{e^{2x}}{x} = k$$

が成り立つ． $g(x) = \frac{e^{2x}}{x}$ とおくと

$$g'(x) = \frac{2e^{2x} \cdot x - e^{2x} \cdot 1}{x^2} = \frac{e^{2x}(2x - 1)}{x^2}$$

よって， $g(x)$ の増減は下表となる．

x	...	0	...	$\frac{1}{2}$...
$f'(x)$	-	/	-	0	+
$f(x)$	↘	/	↘	$2e$	↗

$$\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left\{ x \cdot \left(\frac{e^x}{x} \right)^2 \right\} = \infty \quad \left(\because \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{x} = \infty \right)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -0} g(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +0} g(x) = \infty$$

であり， $y = g(x)$ のグラフは右図となる．

① の異なる実数解の個数は， $y = g(x)$ のグラフと直線 $y = k$ との共有点の個数に一致するから

$k > 2e$ のとき， 2 個

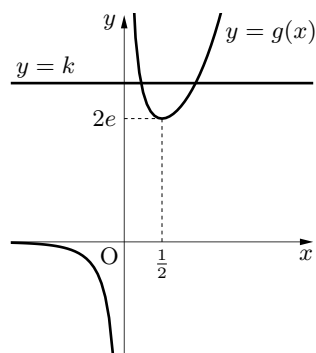
$k = 2e$ のとき， 1 個

$0 \leq k < 2e$ のとき， 0 個

$k < 0$ のとき， 1 個

……(答)

である．



(2) (1) より, 方程式 $e^{2x} = kx$ がただ 1 つの実数解をもつ k の値は

$$k = 2e, \quad k < 0$$

である.

(i) $k = 2e$ のとき, $f(x) = e^{2x} - 2ex$ であり

$$f'(x) = 2(e^{2x} - e)$$

x	0	...	$\frac{1}{2}$...	1
$f'(x)$		-	0	+	
$f(x)$		\		/	

$$f(0) = 1, \quad f(1) = e^2 - 2e$$

$$\frac{5}{2} < e < 3 \text{ より}$$

$$f(1) = e(e - 2) > \frac{5}{2} \left(\frac{5}{2} - 2 \right) = \frac{5}{4} > 1$$

であり, $0 \leq x \leq 1$ における最大値は $e^2 - 2e$ である.

(ii) $k < 0$ のとき, $f(x) = e^{2x} - kx$ であり

$$f'(x) = 2e^{2x} - k > 0$$

$f(x)$ は単調増加であり, $0 \leq x \leq 1$ における最大値は $f(1) = e^2 - k$ である.

以上から, $f(x)$ の $0 \leq x \leq 1$ における最大値は

$$k = 2e \text{ のとき, } e^2 - 2e$$

$$k < 0 \text{ のとき, } e^2 - k$$

.....(答)

となる.

- (i), (ii) いずれのときも $f(x)$ の $0 \leq x \leq 1$ における最大値は

$$f(1) = e^2 - k$$

としてまとめることができる.