以下，log は自然対数であり，e はその底とする．

a は $0<a<1$ を満たす定数とする．次の方程式の異なる実数解の個数を求めよう．

$$x^2=a^{-x}$$

$f(x)=x^2a^x$ とおけば，$f(x)$ は $x=$ $\boxed{\text{ア}}$ で極小値 $\boxed{\text{イ}}$ をとり，$x=$ $\boxed{\text{ウ}}$ で極大値 $\boxed{\text{エ}}$ をとる．また，$\displaystyle\lim_{x\to-\infty}f(x)=$ $\boxed{\text{オ}}$ であり，$\displaystyle\lim_{x\to\infty}f(x)=0$ である．

したがって，求める実数解の個数は，$0<a<$ $\boxed{\text{カ}}$ のとき $\boxed{\text{キ}}$ 個，$a=$ $\boxed{\text{カ}}$ のとき $\boxed{\text{ク}}$ 個，$\boxed{\text{カ}}<a<1$ のとき $\boxed{\text{ケ}}$ 個となる．

(22 明治大 理工・総合数理・政治経済 2)

【答】

ア	イ	ウ	エ	オ	カ	キ	ク	ケ
0	0	$-\dfrac{2}{\log a}$	$\dfrac{4}{(e\log a)^2}$	∞	$e^{\frac{-2}{e}}$	1	2	3

【解答】

$$x^2=a^{-x} \iff x^2a^x=1$$

$f(x)=x^2a^x$ とおくと

$$\begin{aligned}f'(x)&=2x\cdot a^x+x^2\cdot a^x\log a\\&=xa^x(2+x\log a)\end{aligned}$$

$0<a<1$ より $\log a<0$ であり，$-\dfrac{2}{\log a}>0$ である．

$\alpha=-\dfrac{2}{\log a}$ とおくと，$f(x)$ の増減は右表となる．

x	$\cdots$	0	$\cdots$	α	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
x	↘		↗		↘

したがって，$f(x)$ は

$x=\mathbf{0}$ で　極小値 $f(0)=\mathbf{0}$ ……(答)

$x=\alpha=-\dfrac{\mathbf{2}}{\mathbf{\log a}}$ で ……(答)

$$\text{極大値 } f(\alpha)=\alpha^2a^\alpha=\left(-\frac{2}{\log a}\right)^2a^{-\frac{2}{\log a}}=\left(\frac{2}{\log a}\right)^2a^{-2\log_a e}$$

$$=\left(\frac{2}{\log a}\right)^2e^{-2}=\boldsymbol{\frac{4}{(e\log a)^2}}$$ ……(答)

をとる．また

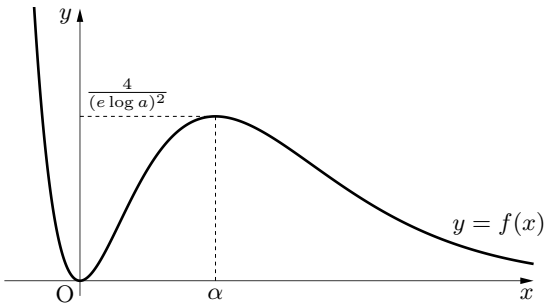
$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=\boldsymbol{\infty}$$ ……(答)

であり

$$\lim_{x\to\infty}f(x)=0$$

である．

したがって，$y=f(x)$ のグラフは，次のようになる．



方程式 $x^2 = a^{-x}$ の実数解の個数は，$y = f(x)$ のグラフと直線 $y = 1$ の共有点の個数である．ここで，不等式 $\dfrac{4}{(e\log a)^2} < 1$ (共有点が 1 個の場合) を解くと

$$(\log a)^2 > \frac{4}{e^2}$$

$0 < a < 1$ より $\log a < 0$ であるから

$$\log a < -\frac{2}{e} \qquad \therefore \quad (0 <)\ a < e^{-\frac{2}{e}}$$

以上より，方程式 $x^2 = a^{-x}$ の実数解の個数は

$0 < a < \boldsymbol{e^{\frac{-2}{e}}}$ のとき　**1** 個，　……(答)

$a = e^{\frac{-2}{e}}$ のとき　**2** 個，　……(答)

$e^{\frac{-2}{e}} < a < 1$ のとき　**3** 個　……(答)

である．